КЛУБ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТАЛАНТИ – УЧЕБНА 2019- 2020 ГОДИНА

КЛАС:	**4**
КРЪГ:	**1**
СРОК **за изпращане решенията на задачите:**	**10 октомври** **talanti_4@abv.bg**

ЗАДАЧИ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ

Най-естественото нещо в аритметиката е да пресмятаме – събираме, изваждаме, умножаваме и делим. При това - и вярно, и бързо. Почти като компютър.

По-долу сме събрали задачи за пресмятане от различни състезания. Надяваме се четивото да е интересно и полезно за Вас.

Започваме с една задача, която бе дадена на откритото първенство на Азия по математика (*AIMO*) през 2015 г. **в темата за втори клас:**

Задача 1. Намерете стойността на

$$4+8+12+16+20+24+28+32+36+40+44+48+52.$$

Решение:

Задачата е елементарна. Компютърът би събрал всичките числа „бързо – бързо” на принципа 4 + 8, 12 + 12; 24 + 16 и така нататък, докато стигне до последното събираемо и крайния резултат.

За разлика от компютъра, който извършва бързо пресмятанията, ние ще предложим няколко по-ефектни начина за пресмятането на израза.

Първи начин: Наблюдениетона събираемите показва, че:

че първото число 4 и последното число 52 имат сбор 56,

второто число 8, и предпоследното число 48; имат сбор 56,.....

Тогава записваме:

$$\mathbf{4+8+12+16+20+24+28+32+36+40+44+48+52=}$$

$$\mathbf{=\underbrace{4+52}_{56}+\underbrace{8+48}_{56}+\underbrace{12+44}_{56}+\underbrace{16+40}_{56}+\underbrace{20+36}_{56}+\underbrace{24+32}_{56}+28=6\times 56+28=364.}$$

Втори начин: Записваме израза така по два начина

$$\mathbf{4+\ 8+\ 12+16+20+24+28+32+36+40+44+48+52}$$

$$\mathbf{52+48+44+40+36+32+28+24+20+16+12+8+\ \ 4}$$

Събираме събираемите, които са едно под друго:

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52$$

$$52 + 48 + 44 + 40 + 36 + 32 + 28 + 24 + 20 + 16 + 12 + 8 + 4$$

$$56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 58 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56$$

Получаваме 13 пъти по 56.

Сборът на 13 събираеми по 56 е 728.

Това обаче е удвоения търсен сбор.

$$A + A = 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 + 56 = 728$$

$$A + A = 728$$

$$A = 728 : 2 = 364.$$

Трети начин:

Събираме тези две числа за да получим сбор, който завършва на 0:

8 + 12 = 20; 16 + 24 = 40; 28 + 32 = 60, ...

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52 =$$

$$= 4 + 20 + 40 + 20 + 60 + 80 + 40 + 100 = 364.$$

Четвърти начин:

Всяко от събираемите се дели на 4.

Представяме ги като произведение два множителя, единият от които е 4.

След това прилагаме разпределителното свойство на умножението:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$$

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52 =$$

$$= 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 4 + 4 \times 5 + 4 \times 6 + 4 \times 7 + 4 \times 8 + 4 \times 9 + 4 \times 10 + 4 \times 11 + 4 \times 12 + 4 \times 13$$

$$= 4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13) = 4 \times (6 \times 14 + 7) = 4 \times (84 + 7) = 4 \times 91 = 364.$$

Пети начин:

Числата $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52$

са образувани по правилото

$$4 \underset{+4}{\rightarrow} 8 \underset{+4}{\rightarrow} 12 \underset{+4}{\rightarrow} 16 \underset{+4}{\rightarrow} \ldots \underset{+4}{\rightarrow} 48 \underset{+4}{\rightarrow} 52.$$

Числова редица, при която всяко число след първото, се получава от предходното с прибавянето на едно и също число $\boldsymbol{d}$ се нарича **аритметична прогресия.** Числото $\boldsymbol{d}$, което прибавяме се нарича разлика.

За бързото пресмятане на сбор на числата на аритметична прогресия можем да използваме следното:

1. **Намираме броят на събираемите** така: От последното изваждаме първото число. Полученото делим на $\boldsymbol{d}$. Към частното прибавяме 1. Резултатът е броя на събираемите**.**
2. **Пресмятаме сбора** така: Към първото число прибавяме последното. Получения сбор умножаваме по броя на събираемите. Полученото произведение делим на 2. Полученото число е сборът на числата от аритметичната прогресия.

В задача 1. получаваме последователно:

Намираме броят на събираемите: От последното число 52 изваждаме първото число 4. (52 - 4 = 48). Полученото число 48 делим на $\boldsymbol{d = 4}$. Получаваме 12. Към частното 12 прибавяме 1. Резултатът е броя на събираемите**: 12 + 1 = 13.**

Пресмятане на сбора: Към първото число 4 прибавяме последното 52. Получения сбор (56) умножаваме по броя на събираемите (13). Полученото произведение ($56 \times 13 = 728$) делим на 2. Получаваме $728 \div 2 = 364$. Търсеният сбор е 364.

$$4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52 = 364.$$

Да повторим *петия начин* при пресмятането на

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + \cdots + 93 + 96 + 99.$$

Числата $3,6,9,12,15,18,21, \dots ,93,96,99$

са образувани по правилото

$$3 \xrightarrow[+3]{} 6 \xrightarrow[+3]{} 9 \xrightarrow[+3]{} 12 \xrightarrow[+3]{} \dots 96 \xrightarrow[+3]{} 99.$$

Намираме броят на събираемите: От последното число 99 изваждаме първото число 3. (99 - 3 = 96). Полученото число 96 делим на $\boldsymbol{d = 3}$. Получаваме 32. Към частното 32 прибавяме 1. Резултатът е броя на събираемите**: 32 + 1 = 33.**

Пресмятане на сбора: Към първото число 3 прибавяме последното 99. Получения сбор (102) умножаваме по броя на събираемите (33). Полученото произведение ($102 \times 33 = 3366$) делим на 2. Получаваме $3366 \div 2 = 1683$. Търсеният сбор е 1683.

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + \cdots + 93 + 96 + 99 = 1683.$$

В темата за трети клас на същото състезание *AIMO* – 2015 бе дадена следната

Задача 2. Намерете стойността на $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - \ldots - 100 + 121$.

Решение: Първо ще отбележим, че **„- ...-”** означава пропуснати числа. Кои са те?

В началото са числата

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

Това са числа, които се представят във вида

$$1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 5 \times 5, \dots$$

Откриваме закономерността! Следващите числа са 36, 49, 64, 81.

Задачата е:

Да се намери стойността на израза, в който участват числата

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 и 121.

Но тук трябва да открием и друга закономерност.

Пред кои числа е поставен минус, пред кои – плюс.

Не е трудно да се установи всъщност, че минус има пред четните, а плюс – пред нечетните числа.

Тогава задачата изглежда така:

Намерете стойността на $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121.$

Няма да коментираме компютърното решение:

$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121 = -3 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121 =$$
$$= 6 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121 = -10 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121 =$$
$$= 15 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121 = -21 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121 = 28 - 64 + 81 - 100 + 121 =$$
$$= -36 + 81 - 100 + 121 = 45 - 100 + 121 = -55 + 121 = 66.$$

Препоръчваме да решим задачата така:

Изразът

$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121$

прочитаме от края $121 - 100 + 81 - 64 + 49 - 36 + 25 - 16 + 9 - 4 + 1$

и пресмятаме

$(121 - 100) + (81 - 64) + (49 - 36) + (25 - 16) + (9 - 4) + 1 = 21 + 17 + 13 + 9 + 5 + 1 = 21 + 1 + 17 + 5 + 13 + 9=$

$$= (21 + 1) + (17 + 5) + (13 + 9) = 3 \times 22 = 66.$$

Коментар:

*В училищата на Азия отрицателните числа се изучават от втори клас***.** Затова азиатчетата предпочитат този начин:

$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + 81 - 100 + 121$$
$$= (1 - 4) + (9 - 16) + (25 - 36) + (49 - 64) + (81 - 100) + 121$$
$$= -3 - 7 - 11 - 15 - 19 + 121 = 66.$$

В темата за 4. клас на *AIMO* – 2015 бе следната

Задача 3. Намерете стойността на израза

$$2 + 4 + 6 + 8 - 10 + 12 + 14 + 16 + 18 - 20 + \cdots + 96 + 98 - 100.$$

Решение:

В търсене на решението започваме **с наблюдение**:

В израза са поставени числата 2, 4, 6, 8, 10, 12,14, 16,18, 20, ..., 96, 98, 100.

Пропуснатите числа в израза (**„+ ... +”)** са четните числа от 22 до 94 включително.

Броят на числата в израза е равен на броя на четните числа от 1 до 100 включително.

Т.е. 50.

Важен е въпросът със знаците:

$$2+4+6+8-10$$

$$12+14+16+18-20$$

...

$$92+94+96+98-100.$$

Значите минус са поставени пред 10 числа: 10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90, 100.

Вече сме готови да предложим

Първи начин:

Разделяме числата в израза по пет. Получаваме 10 израза в скоби.

$$2+4+6+8-10+12+14+16+18-20+\cdots+92+94+96+98-100=$$

$$=(2+4+6+8-10)+(12+14+16+18-20)+\cdots+(92+94+96+98-100)=$$

$$=10+40+\cdots+280.$$

След пресмятане на изразите в скобите получаваме

$$10, 40, \ldots, 280.$$

Откритата закономерност е 10, 10 ***+ 30*** = 40, ...

Т.е. числата са $10,\ 40, 70, 100, 130, 160, 190,\ 220,\ 250,\ 280.$

Сборът им е

$$(10+280)+(40+250)+(70+220)+(100+190)+(130+160)=5\times290=1450.$$

Съвсем естествено се намира и

Втори начин:

Ако вместо да пресмятаме

$$(2+4+6+8-10)+(12+14+16+18-\mathbf{20})+\cdots+(92+94+96+98-100)$$

пресмятаме

$$(2+4+6+8+10)+(12+14+16+18+20)+\cdots+(92+94+96+98+100)$$

За всяка една група числа имаме увеличение на сбора съответно с

$$20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 \text{ и } 200.$$

Тогава търсения сбор е равен на разликата на

$$(2+4+6+8+10)+(12+14+16+18+20)+\cdots+(92+94+96+98+100)$$

и $20+40+60+80+100+120+140+160+180+200$.

Първо,

При пресмятането на

$(2+4+6+8+10)+(12+14+16+18+20)+\cdots+(92+94+96+98+100)$,

Съобразяваме, че това са 50 събираеми- четните числа от 2 до 100.

Сборът на най-малкото и най-голямото сред тях е 102, след това

4 + 98 = 102, 6 + 96 = 102, и така нататък до 50 + 52 = 102.

Т.е. в 25- те групи числа сборът е все 102. Сборът е $25\times 102=2550$.

Сега не е трудно да пресметнем, че

$$20+40+60+80+100+120+140+160+180+200=1100.$$

Окончателно стойността на израза от задачата е

$$2550-1100=1450.$$

ОЩЕ НЯКОЛКО ЗАДАЧИ ЗА ПРЕСМЯТАНЕ СТОЙНОСТТА НА ИЗРАЗ

Като разгледаните по-горе задачи е и следващата

Задача 4. Пресметнете:

а) $1-2+3-4+5-6+\cdots-88+89$;

б) $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+14-\cdots+301+302$.

Решение:

а) $1-2+3-4+5-6+\cdots-88+89$.

Първи начин (можете да пропуснете, заради отрицателните числа):

$$\underbrace{\underbrace{(1-2)}_{=-1}+\underbrace{(3-4)}_{=-1}+\underbrace{(5-6)}_{=-1}+\cdots+\underbrace{(87-88)}_{=-1}}_{=-44}+89=-44+89=45.$$

Втори начин:

$$1-2+3-4+5-6+\cdots-88+89=\left(\underbrace{1+3+\cdots+87}_{44\text{ събираеми}}+89\right)-\left(\underbrace{2+4+\cdots+86+88}_{44\text{ събираеми}}\right)=$$

$$=22\times 88+89-22\times 90=1936+89-1980=2025-1980=45.$$

И сега нещо познато:

Трети начин:

$$1-2+3-4+5-6+\cdots-88+89=\underbrace{\underbrace{(89-88)}_{1}+\underbrace{(87-86)}_{1}+\cdots+\underbrace{(3-2)}_{1}}_{44}+1=44+1=45$$

б) Ето едно интересно решение (отново с отрицателни числа) :

$$1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+14-\cdots+301+302=$$

$$\underbrace{(1+2-3-4)}_{=-4}+\underbrace{(5+6-7-8)}_{=-4}+\underbrace{(9+10-11-12)}_{=-4}+\cdots+\underbrace{(297+298-299-300)}_{=-4}+301+302=$$

$$=75\times(-4)+301+302=303.$$

Изкушаваме се и ще разгледаме и

Задача 5. Сумата на първите 100 естествени числа е 5050. На колко е равна сумата на първите 100 нечетни числа?

Задачата е от книгата на *Б. Лазаров, Й. Табов* и *К. Банков* „Тренировъчни тестове” (*Издателство „Лик”, 1999 г.*).

Тя не би била така интересна, ако имаше формулировка *„На колко е равна сумата на първите 100 нечетни числа?”.*

Защото тогава, пък какво ни пречи и при такава формулировка да запишем:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+195+197+199}_{100\ \textit{събираеми}}=50\times200=10\,000.$$

<u>Тук ще внесем пояснение</u>:

Ако подредим числата нечетно, четно ще получим

1, 2

3,4

...

197, 198

199, 200

Сред първите двеста числа (от 1 до 200) са 100 нечетни и 100 четни.

Все пак остава открити въпросите:

Какво ли са имали предвид авторите на задачата с изречението „*Сумата на първите 100 естествени числа е 5050*”?

И как да използваме това подсказване?

Един от отговорите е следният:

$$1+\underbrace{2}_{+99=101}+3+\underbrace{4}_{+99=103}+5+\ldots+\underbrace{96}_{+99=195}+97+\underbrace{98}_{+99=197}+99+\underbrace{100}_{+99=199}$$

Разчитаме така: Ако към сбора на целите числа от 1 до 100 прибавим 50 пъти по 99 ще получим сбора на първите 100 нечетни числа.

Тогава търсеният сбор е $5050 + 50 \times 99 = 5050 + 4950 = 10\,000$.

Ето и решението на авторите:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 199 = 1 + (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + \cdots + (2 \times 99 + 1) =$$

$$= 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 99) + 100 = 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100) - 100 = 10\,000.$$

Сред популярните задачи е следната

Задача 6. Нека

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 . \times 3! + \ldots + 9 \times 9! = 10! - \square,$$

Кое число трябва да поставим в квадратчето?

Пояснение: *Един от препинателните знаци е удивителният, който поставяме след възклицателни изречения, заповед, молба. Удивителното е, че удивителната е и математически знак. През 1808 г. френският математик Кристиан Крамп (1760-1826) въвежда знака „!”, означавайки с N! (чете се N факториел) произведението на всички естествени числа от 1 до N. Приема се че 0!=1. Няколко примера:*

1! = 1, 2! = 1.2=2, 3! = 1 .2 . 3 = 6 и т. н.

Сред популярните начини за пресмятане на израза

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + 9 \times 9!$$

е фактът, че

$$1 \times 1! = 1 = 2! - 1!;$$

$$2 \times 2! = 4 = 6 - 2 = 3! - 2!;$$

$$3 \times 3! = 18 = 24 - 6 = 4! - 3! \ldots$$

и така нататък.

В случая

$$\mathbf{1} \times \mathbf{1}! + \mathbf{2} \times \mathbf{2}! + \mathbf{3} \times \mathbf{3}! + \ldots + \mathbf{9} \times \mathbf{9}! =$$

$$= \mathbf{2}! - \mathbf{1}! + \mathbf{3}! - \mathbf{2}! + \mathbf{4}! - \mathbf{3}! + \ldots + \mathbf{10}! - \mathbf{9}! =$$

$$= \mathbf{2}! - \mathbf{1}! + \mathbf{3}! - \mathbf{2}! + \mathbf{4}! - \mathbf{3}! + \ldots + \mathbf{10}! - \mathbf{9}! = \mathbf{10}! - \mathbf{1}!.$$

Отговор: Търсеното число е 1.

Задача 7. (*Зимни математически празници, Русе, 2002*) Да се намери сборът на всички четирицифрени числа, които могат да се запишат с цифрите 2, 3, 4 и 6 (Цифрите могат да се повтарят, например 6 263 и 4 444).

Решение: Първо ще намерим броя на всички четирицифрени числа, които могат да се запишат с 4 избрани цифри. За цифрата на хилядите имаме 4 възможности – всяка от четирите цифри. По същия начин се вижда, че за всяка от следващите цифри на стотиците, десетиците и единиците имаме по 4 възможности. Следователно броят на всички естествени числа, записани с 4 избрани цифри, е $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$. Тъй като четирите цифри участват равноправно:

64 от числата имат първа цифра 2;

64 от числата имат първа цифра 3;

64 от числата имат първа цифра 4;

64 от числата имат първа цифра 6.

Същите съображения показват, че всяка от цифрите ще се появява по 64 пъти като цифра на стотиците, десетиците и единиците.

Тогава сборът на всички числа е

$$64 \times 2 \times 1000 + 64 \times 2 \times 100 + 64 \times 2 \times 10 + 64 \times 2 \times 1 +$$

$$+ 64 \times 3 \times 1000 + 64 \times 3 \times 100 + 64 \times 3 \times 10 + 64 \times 3 \times 1 +$$

$$+ 64 \times 4 \times 1000 + 64 \times 4 \times 100 + 64 \times 4 \times 10 + 64 \times 4 \times 1 +$$

$$+ 64 \times 6 \times 1000 + 64 \times 6 \times 100 + 64 \times 6 \times 10 + 64 \times 6 \times 1 =$$

$$= 64 \times (2 + 3 + 4 + 6) \times 1000 + 64 \times (2 + 3 + 4 + 6) \times 100 +$$

$$+ 64 \times (2 + 3 + 4 + 6) \times 10 + 64 \times (2 + 3 + 4 + 6) \times 1 =$$

$$= 960 \times 1000 + 960 \times 100 + 960 \times 10 + 960 = 1\,066\,560.$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 8.

Колко са десетиците в числото, равно на:

102 − 101 + 102 − 100 + 102 – 99 + 102 − 98 + 102 − 97 + 102 – 96 + 102 − 95 + 102 – 94 ?

Задача 9. Нека разгледаме сбора 3 + 6 + 9 + ... + 993 + 996 + 999

а) Колко са събираемите?

б) Пресметнете сбора.

Задача 10. (*AIMO 2017, Куала Лумпур – тема за 3 клас*)

Пресметнете израза:

1 + 2 + 3 – 4 + 5 + 6 + 7 – 8 + 9 + 10 + 11 – 12 + …+ 33 + 34 + 35 – 36.

Задача 11.

Да се намери сборът на всички четирицифрени числа, които могат да се запишат с цифрите 0, 1, 2 и 3 (Цифрите могат да се повтарят, например 1 000 и 2 022).

Задача 12. (*AIMO в Банкок, 2018 г. -за завършен 3 клас*)

Пресметнете

(1 + 2 + 3 + … + 25 + 26 +27 + 26 + 25 + … + 3 + 2 + 1) – 1 – 3 – 5 - …- 49 – 51.

ЛИСТ ЗА ОТГОВОРИ за кръг .....

име на участника.............. клас ....

задача	отговор	Решение
1		
2		
3		
4		
5		

Бележки по условията задачите и по решенията: