КЛУБ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТАЛАНТИ – УЧЕБНА 2019- 2020 ГОДИНА

КЛАС:	**6**
КРЪГ:	**1**
СРОК **за изпращане решенията на задачите:**	**10 октомври** **talanti_5@abv.bg**

НАЙ-ГОЛЯМ ОБЩ ДЕЛИТЕЛ

АЛГОРИТЪМ НА ЕВКЛИД

Определение. Естественото число d се нарича **най-голям общ делител (НОД)** на естествените числа a и b, поне едно от които е различно от 0, ако:

- Всяко от числата a и b се дели на d;
- Ако d_1 е друг общ делител на числата a и b, тогава d_1 дели d.

Означаваме най-големият общ делител на числата a и b така $(a;\ b)$ или НОД $(a;\ b)$.

Ако $d = 1$, тогава числата a и b се наричат взаимно прости.

Известно е следното

Твърдение: Ако $a=bq + r$, тогава $(a;b) = (b;r)$.

Доказателство:

Нека числата a и b се делят на k. Тогава bq ще се дели на k.

Тогава $r = a - bq$ ще се дели на k.

Ако b и r се делят на m, тогава bq ще се дели на m и $a = bq + r$ ще се дели на m.

Алгоритъмът* на Евклид

посочва пътят за намиране на **най-големия общ делител** на естествените числа a и b.

Нека a и b са естествени числа и нека

$$a = b \times q_0 + r_1$$

$$b = r_1 \times q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \times q_2 + r_3$$

...

$$r_{n-1} = r_n \times q_2 + 0$$

Тогава $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{r_n}$.

Всичко следва от това, че ако $a = bq + r$, тогава $(a;b)=(b;r)$; ако $r \neq 0$, тогава $(0;r) = r$.

* **Алгоритъм** – това е всяко точно описана поредица от действия, която винаги води до резултат.

Евклид е древногръцки математик живял в египетския град Александрия при управлението на Птолемей I (323-283 г. пр.н.е.). Често определян като баща на геометрията, той е автор на книгата „Елементи“, един от най-влиятелните трудове в историята на математиката, служил като основен учебник при преподаването на математика и най-вече на геометрия от времето на своята поява до края на XIX век и началото на XX век. Той е автор и на изследвания в областта на перспективата, коничните сечения, сферичната геометрия, теорията на числата	

Няколко примера

Първи пример: Да се намери най-големият общ делител на числата 2353 и 1261.

Решение:

Прилагаме алгоритъма на Евклид и получаваме последователно:

$2353 = 1261 \times 1 + 1092;$

$1261 = 1092 \times 1 + 169;$

$1092 = 169 \times 6 + 78;$

$169 = 78 \times 2 + 13;$

$78 = 13 \times 6 + 0$

Извод: (2353; 1261) = **13**.

Втори пример: Да се намери най-големият общ делител на числата 1173 и 323.

Решение:

$1173 = 323 \times 3 + 204;$

$323 = 204 \times 1 + 119;$

$204 = 119 \times 1 + 85;$

$119 = 85 \times 1 + 34;$

$85 = 34 \times 2 + 17$

$34 = \mathbf{17} \times 2 + 0$

Извод: (1173; 323) = **17**.

НАЙ-МАЛКО ОБЩО КРАТНО

Определение. Естественото число m се нарича **най-малко общо кратно** (**НОК**) на числата a и b, ако:

- a дели m и b дели m;
- ако M е естествено число и a дели M, а b дели M, тогава $m \leq M$.

Означаваме: НОК $(a;b) = m$.

Няколко примера

Първи пример: Да се намери най-малкото общо кратно на числата 36 и 99.

Решение:

С традиционния начин за намиране на НОК получаваме:

$\mathbf{36, 99 \mid 2}$

$\mathbf{18, 99 \mid 2}$

$\mathbf{9, 99 \mid 3}$

$\mathbf{3, 33 \mid 3}$

$\mathbf{1, 11 \mid 11}$

$\mathbf{1 \mid 1}$

⟹ НОК (36; 99) = 11.3.3.2.2 = 396.

Втори пример: Да се намери най-малкото общо кратно на числата 1403, 1058 и 3266.

Решение:

С традиционния начин за намиране на НОК получаваме:

$(1403; 1058; 3266|2)$

$(1403; 529; 1633\ \ |23)$

$(61;\quad 23;\quad 71\ |23)$

$(61;\quad 1;\quad 71\ \ |61)$

$(1;\quad 1;\quad 71\ \ |71)$

$(1;\quad 1;\quad 1\ \ |\text{НОК} = 2\ \times\ 23\ \times\ 23\ \times\ 61\ \times\ 71 = 4\,582\,198\,)$

НОК (1403;1058 ; 3266) = 2 × 23 × 23 × 61 × 71 = 4 582 198.

Друг начин:

Прилагаме алгоритъмът на Евклид за числата 1403 и 1058 е:

$$1403 = 1058 \times 1 + 345$$

$$1058 = 345 \times 3 + 23$$

$$345 = 23 \times 15\ +\ 0.$$

Получаваме, че (1403;1058*)* = **23**.

Тогава най- малкото общо кратно на числата 1403 и 1058 е

$$1403 \times 1058 \div 23 = 64\,538.$$

За числата 64538 и 3266 най-големият общ делител е 46.

Тогава най-малкото общо кратно на трите числа 1403, 1058 и 3266 е

$$64\,538 \times 3\,266 \div 46 = 4\,582\,198.$$

Формула

Най-големият общ делител на няколко числа **умножен** с **най-малкото общо кратно** на същите числа е число, което е **произведението на тези няколко числа.**

$$\text{НОД}(a; b) \times \text{НОК}\ (a, b)\ =\ a \times b$$

Приложения

Задача 1. Да се съкрати дробта

$$\frac{154}{1309}.$$

Решение:

Първи начин:

Да намерим (1309; 154).

$1309 = 154 \times 8 + 77$;

$154 = 77 \times 2 + 0$ $\Rightarrow$ (1309; 154)=**77.**

Тогава

$$\frac{154}{1309} = \frac{154:77}{1309:77} = \frac{2}{17}.$$

Втори начин:

С признаците за делимост установяваме, че нито 2, нито 3,нито 4, нито 5, нито 6, нито 8, нито 9, нито 10 делят и двете числа.

Пропуснахме 7 и 11.

С признака за делимост на 11 установяваме, че и двете числа се делят на 11, защото

154 $\Rightarrow$ 1 + 4 – 5 = 0 се дели на 11, следователно и числото 154 се дели на 11.

1309 $\Rightarrow$ 1 + 0 – (3 + 9) = - 11 се дели на 11, следователно и числото 1309 се дели на 11.

$$\frac{154}{1309} = \frac{154:11}{1309:7} = \frac{14}{119}.$$

Числото 14 се дели на 7, проверяваме и установяваме че и 119 се дели на 7

Окончателно получаваме, че

$$\frac{154}{1309} = \frac{154:11}{1309:11} = \frac{14}{119} = \frac{14:7}{119:7} = \frac{2}{17}.$$

Задача 2. („*Математическо кенгуру", 1991 г.)*

а) След опростяване на обикновената дроб $\frac{1665}{3285}$ се получава:

A) $\frac{333}{657}$ **B)** $\frac{555}{1095}$ **C)** $\frac{37}{73}$ **D)** $\frac{111}{219}$ **E)** $\frac{3}{7}$

Решение:

$3285 = 1665 \times 1 + 1620;$

$1665 = 1620 \times 1 + 45;$

$1620 = 45 \times 36 + 0;$

Извод:(1665;3285)=**45**.

От 1665 : 45 = 37 и 3285 : 45 = 73, следва че отговор на задачата е **C).**

б) След опростяване на обикновената дроб $\frac{27273}{72728}$ се получава:

A) $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{3}{7}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$

Решение:

$72728 = 27273 \times 2 + 18182;$

$27273 = 18182 \times 1 + 9091;$

$18182 = 9091 \times 2 + 0;$

Извод:(72728, 27273) = **9091**..

От 72728 : 9091 = 8 и 27273: 9091 = 3 получаваме, че верния отговор е **D**).

Друг начин:

$$\frac{27273}{72728} = \frac{27000 + 270 + 3}{72000 + 720 + 8} = \frac{3 \times (9000 + 90 + 1)}{8 \times (9000 + 90 + 1)} = \frac{3}{8}.$$

Задача 3. („*Европейско кенгуру", 2013 г., национален кръг)*

Дробта

$$\frac{2013201320132013}{1586158615861586}$$

е равна на несъкратимата дроб:

A) $\frac{33}{26}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2013}{1586}$ **E)** $\frac{11}{21}$

Решение:

Тази задача прилича на предходните, но по-лесното и достъпно решение започва с

$$\frac{2013201320132013}{1586158615861586} = \frac{2013 \times (1000000000000 + 100000000 + 10000 + 1)}{1586 \times (1000000000000 + 100000000 + 10000 + 1)} = \frac{2013}{1586}.$$

След това продължението е като в предишните задачи, за да достигнем до

$$\frac{2013}{1586} = \frac{33}{26}$$

Отговор: А).

Задача 4. (*списание „Математика”, брой 6, 1988 г., стр. 32*) Край железопътна гара преминали три влака. В първият имало 418 пътници, във втория – 494, а в третия – 456. По колко пътнически вагона е имало във всеки влак, ако е известно, че празни вагони не е имало, във всеки вагон пътували еднакъв брой пътници и той е най-големият от всички възможни?

Решение:

От (418; 456) = 38, (418; 494) = 38 и (494; 456) = 38, следва че числото 38 дели и трите числа 418, 494 и 456, което означава че във всеки вагон са пътували по 38 пътници. Броят на вагоните във всеки влак получаваме така

За първия влак – 418 : 38 = 11 вагона;

За втория влак – 494 : 38 = 13 вагона;

За третия влак – 456 : 38 = 12 вагона.

Нека решим

Задача 5. (*„Иван Салабашев”, 2005 г.*) Димо намерил най-малкото общо кратно на всеки две от числата 60, 90 и 150. Кое от изброените числа не е измежду получените от него отговори?

А) 900 **Б)** 900 **В)** 180 **Б)** 450

Решение: Всичко следва от (60; 90) = 180; (60;150) = 300; (150; 90) = 450.

Отговор: Б) 900.

Задача 6. (*международно състезание във Филипините, 2005 г.*) Четирима приятели се надбягват надолу по прашно стълбище. Петър стъпва на всяко второ стъпало, Брус стъпва на всяко трето стъпало, Джесика стъпва на всяко четвърто, а Марин на всяко пето.Ако първото и последното стъпало са единствените с по четири отпечатъка, то колко са стъпалата с точно един отпечатък?

Решение: От НОК (2; 3; 4; 5) = 60, получаваме, че стъпалата са точно 60, защото единствено само първото и последното имат по четири отпечатъка. Изброяваме всички числа, по-големи от 1 и по-малки от 60, които се делят точно на едно от числата 2, 3, 4 и 5. Получаваме 20. Стъпалата с един отпечатък са 20.

Задача 7. (*по идея на Р. Женорадов*) Ако числата x и y са естествени, взможно ли е

НОД (x; y) + НОК (x; y) + x + y = 2017? Отговорът да се обоснове!

Решение: Сборът на НОД(x; y) + НОК(x; y) + x + y е винаги четно число.

Да разгледаме всички възможности:

- *ако и двете числа са четни*, тогава НОД (x; y) е четно число, НОК (x; y) е също четно число, сборът x +y е също четно число; <u>НОД (x; y) + НОК (x; y) + x + y е четно число;</u>

- *ако и двете числа са нечетни*, тогава НОД (x; y) е нечетно число, НОК (x; y) е нечетно число, сборът x +y е четно число; <u>НОД (x; y) + НОК (x; y) + x + y е четно число;</u>

- *ако двете числа са с различна четност* (едното е четно, а другото- нечетно), тогава

НОД (x; y) и НОК(x; y) е също с различна четност, сборът x +y ще е нечетно число;

<u>НОД(x; y) + НОК(x; y) + x + y е четно число.</u>

Задача 8. Намерете НОД $\mathbf{(\underbrace{1\ldots1}_{n};\ \underbrace{1\ldots1}_{m})}$**,** където n и m са естествени числа и $m > n$.

Решение: От $m > n$ и $m = nq + r$, където $0 \le r < n$, то една стъпка от алгоритма на Евклид води до:

НОД $\mathbf{(\underbrace{1\ldots1}_{n};\ \underbrace{1\ldots1}_{m})}$ = НОД $\mathbf{(\underbrace{1\ldots1}_{n};\ \underbrace{1\ldots1}_{r})}$**.**

Прилагайки алгоритъма на Евклида за числата ще получим, че той се прилага към тяхната дължина m и n. Затова в края се получава число, което се състои от НОД (m, n) цифри 1.

Задача 9. (*„Ум+”, 1994 г.*) Всяка от цифрите 0, 1, 2, ..., 9 е използвана точно по един път в записа на две петцифрени числа. Възможно ли е най-големият общ делител на тези числа да е:

а) 1; **б)** 165; **в)** 495?

Решение:

а) Да възможно е: например ако числата са 24680 и 13579;

б) Да възможно е: например ако числата са 68145 и 92730;

в) Не е възможно:

От $495 = 9 \times 5 \times 11$, тогава търсените числа трябва да се делят и на 5, и на 9, и на 11.

Числата са от вида $\overline{abcd0}$ и $\overline{xyzt5}$.

И двете числа се делят на 9, тогава като отчетем, че 0 + 1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45 можем да разгледаме следните възможности:

$\overline{abcd0}$	$\overline{xyzt5}$	**извод**
Сбор на цифрите на числото **9**	Сбор на цифрите на числото **36**	Не е възможно, защото сборът $x + y + z + t$ е най-много 6 + 7 + 8 + 9 = 30
18	**27**	**Случай 1.**
27	**18**	**Случай 2**
36	**9**	Не е възможно, защото сборът $a + b + c + d$ е най-много 6 + 7 + 8 + 9 = 30

Случай 1. Нека $a + b + c + d = 18$.

От признака за делимост на 11$\Rightarrow$ $a - b + c - d$ е число, което се дели на 11. Не е трудно да съобразим, че това са числата -11, 0 и 11.

Тогава $a + b + c + d + a - b + c - d = 2a + 2c = 2(a + c)$ е 7, 18 или 29.

Не е трудно да установим, че тогава $a + c = b + d = 9$.

Освен това $x + y + z + t + 5 = 27$.

От признака за делимост на 11$\Rightarrow$ $x - y + z - t + 5$ е число, което се дели на 11. Не е трудно да съобразим, че това са числата 0 или 11.

Тогава $x + y + z + t + 5 + x - y + z - t + 5 = 2x + 2z + 10 = 2(x + z + 5)$ е 27 или 38.

Не е трудно да установим, че тогава $x + z = 14$; $y + t = 8$.

Сега нека наблюдаваме $a + c = b + d = 9$ и $x + z = 14$ и $y + t = 8$.

И да си отговорим на въпроса „Цифрата 9 можем ли да поставим в някой равенство?”. Припомняме, че нико едно от цифрите, означени с букви , не е 0, защото 0 е вече използвана.

Отговорът на този въпрос показва, че този случай е невъзможен.

Случай 2. Нека $a + b + c + d = 27$.

По признака за делимост на 11⇒ $a - b + c - d$ е число, което се дели на 11. Не е трудно да съобразим, че това са числата (-11), 0 и 11.

Тогава $a + b + c + d + a - b + c - d = 2a + 2c = 2(a + c)$ е 16, 27 или 38.

Не е трудно да установим, че тогава $a + c = 8$ или $a + c = 19$.

Тук е невъзможно $a + c = 19$, защото $a + c$ е най-много 17.

Невъзможно е и $a + c = 8$, защото тогава от $a + b + c + d = 27$ получаваме $b + d = 19$, а този сбор е най-много 17.

И този случай е невъзможен.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 10. Кое едноцифрено число има най-голям брой делители естествени числа?

Задача 11. Коя е най-голямата стойност на НОД (a, b), ако a .b = 600?

Задача 12. Сборът на 5 естествени числа е 120. Коя е най-голямата стойност на НОД на тези числа?

Задача 13. Може ли НОД на 2 естествени числа да е по-голям от разликата на по-голямото и по-малкото?

Задача 14. Даден е правоъгълник с размери 404 *cm* на 144 *cm*. От него се отрязват квадрати с размери 144 *cm* на 144 *cm*. От останалия правоъгълник се изрязват квадрати със страна, равна на по-малката му страна. Тези действия извършваме, докато е възможно. Да се намери броят и размерите на разрязаните квадрати.

ЛИСТ ЗА ОТГОВОРИ за кръг .....

име на участника.............. клас ....

задача	отговор	Решение
1		
2		
3		
4		
5		

Бележки по условията задачите и по решенията: