**КЛУБ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТАЛАНТИ – УЧЕБНА 2022- 2023 ГОДИНА**

| | |
|---|---|
| **КЛАС:** | **7** |
| **КРЪГ:** | **1** |
| **Адрес за изпращане решенията на задачите** | **talanti_7@abv.bg** |
| **Срок** | **20 октомври 2022** |
| **Тема 2** | **15 октомври 2022 г.**<br>**www.mathematicalmail.com** |

**Здравейте,**

Това е тема № 1 от клуб „Математически таланти“ за 2022 г.- 2023 г.

**Какви са нашите очаквания?**

В посочения срок **да ни изпратите**:

- отговори и по възможност решения на задачите за самостоятелна работа;
- бележки по условията на задачите;

**Оформлението на листовете** да е в следния вид:

**Име на детето, клас, училище, населено място**

**(**данните ще се използват при издаване на сертификат **за участие)**

| № на задачата | **Отговор** | **Решение** |
|---|---|---|
| | | |

**Резултати от кръга**

След проверка на представените отговори и решения ще получите резултат от проверка. Всеки правилен отговор на всяка задача се оценява с 2 точки, ако отговорът е непълен – с 1 точка, ако отговорът е грешен или не е посочен – 0 точки.

**Следващият кръг**

В посочените срокове ще изпращаме на Вашите адреси темите за разглеждане.

Ще изпращаме и обобщение на бележките Ви по условията на задачите и техните решения, ще цитираме имената на участниците, които са ги предложили.

**Условията за участие в клуба**

След кръг 2 всички участници, които са изпратили отговори и решения на първите две теми за своя клас, ще получат графика и условията за продължаване на участието в клуба.

**В тема 1 Ви предлагаме**

**УСЛОВИЯ, ОТГОВОРИ И КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ НАЦИОНАЛНОТО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ ЗА ШЕСТИ КЛАС ПРЕЗ 2009 Г. И 2009 Г.**

**Задача 1.** (*задачата е под № 1 от Националното външно оценяване за 6. клас през 2009 година*) На колко е равен сборът на числата 3,4 и $-9{,}1$ ?

а) – 5,7 б) 12,5 в) – 12,5 г) 5,7

**Решение:**

3,4 + (– 9,1) = 3,4 – 9,1 = – 5,7 ⟹ **Верен отговор:** а) – 5,7.

**Задача 2. (2 - 2009)**

Разликата на 3 и – 8 е равна на:

а) – 5 б) 5 в) −11 г) 11

**Решение:** 3 – (– 8) = 3 +8 = 11⟹ **Верен отговор:** г) 11 .

**Задача 3. (3 - 2009)**

На колко е равна стойността на израза $6-(2{,}14-9{,}5)$ ?

а) 1,36 б) 13,36 в) 5,64 г) 17,64

**Решение:**

Ще пресметнем по два начина:

$6-(2{,}14-9{,}5)=6-(-7{,}36)=6+7{,}36=13{,}36.$

$6-(2{,}14-9{,}5)=6-2{,}14+9{,}5=3{,}86+9{,}5=13{,}36$

⟹ **Верен отговор:** б) 13,36.

**Задача 4. (1 - 2010)**

$$1{,}3-1{,}7+1{,}1-1{,}9+0{,}2=$$

а) 10 б) 1 в) 0 г) −1

**Решение:**

Ще пресметнем по два начина:

$$1{,}3-1{,}7+1{,}1-1{,}9+0{,}2=-0{,}4+1{,}1-1{,}9+0{,}2=$$

$$= 0{,}7 - 1{,}9 + 0{,}2 = -1{,}2 + 0{,}2 = -1$$

$$1{,}3 + 1{,}1 + 0{,}2 - 1{,}7 - 1{,}9 = 2{,}6 - 3{,}6 = -1$$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) $-1$.

**Задача 5. (2 - 2010)**

$$\left(-\frac{3}{2}\right):\frac{3}{4} =$$

а) $-2$ б) $-\frac{9}{8}$ в) $-\frac{1}{2}$ г) $\frac{1}{2}$

**Решение:**

$\left(-\frac{3}{2}\right):\frac{3}{4} = \left(-\frac{3}{2}\right).\frac{4}{3} = -\frac{3.4}{2.3} = -\frac{2}{1} = -2 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) $-2$.

**Задача 6. (4 - 2009)**

Кое от числата $-4{,}1567$ ; $-50$; $\frac{1}{1000}$ и $-0{,}003$ е най-малко?

а) $-4{,}1567$ б) $-50$ в) $\frac{1}{1000}$ г) $-0{,}003$

**Решение:**

$-50 < -4{,}1567 < -0{,}003 < \frac{1}{1000} \Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) $-50$.

**Задача 7. (3 - 2010)**

Вярната подредба на числата $a = -2{,}5$; $b = 0{,}05$; $c = -2{,}1$ е:

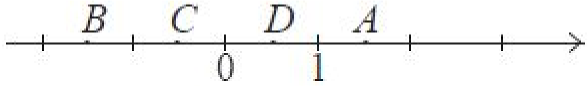
а) $a < b < c$ б) $b < c < a$ в) $c < a < b$ г) $a < c < b$

**Решение:**

$a = -2{,}5 < c = -2{,}1 < b = 0{,}05 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) $a < c < b$.

**Задача 8. (4 - 2010)**

Коя от точките на чертежа съответства на числото $-0{,}5$ от числовата ос?




а) $A$ б) $B$ в) $C$ г) $D$

**Решение:**

$-0,5$ е вляво от 0. Това е точката C.

Точките *B, C, D* и *A* са съответни на числата -1,5; -0,5, 0,5 и 1,5.

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) *C.*

**Задача 9. (5 - 2010)**

$$\left|-\frac{7}{2}\right|+\frac{7}{2}=$$

а) $-7$ б) 0 в) 3,5 г) 7

**Решение:**

$\left|-\frac{7}{2}\right|+\frac{7}{2}=-\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{14}{2}=7 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) 7.

**Задача 10. (7 - 2010)**

$$(-2)^2+3:(-1)=$$

а) 7 б) 1 в) $-1$ г) -7

**Решение:**

$(-2)^2+3:(-1)=4-3=1 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) 1.

**Задача 11. (13 - 2010)**

$$\left(-\frac{(-4)^2}{2^3}\right)^3=$$

а) $-8$ б) $-\frac{1}{8}$ в) $-2$ г) $\frac{1}{2}$

**Решение:**

Ще пресметнем по два начина:

$$\left(-\frac{(-4)^2}{2^3}\right)^3=\left(-\frac{16}{8}\right)^3=(-2)^3=-8$$

$\left(-\frac{(-4)^2}{2^3}\right)^3=\left(-\frac{4^2}{2^3}\right)^3=\left(-\frac{(2^2)^2}{2^3}\right)=\left(-\frac{(2^2)^2}{2^3}\right)^3=\left(-\frac{2^4}{2^3}\right)^3=(-2^{4-3})^3=(-2)^3=-8 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) $-8$.

**Задача 12. (5 - 2009)** Числото 54 040 е равно на сбора:

а) $5.10^4+4.10^3+4.10^2$ б) $5.10^4+4.10^3+4.10$

в) $5.10^4 + 4.10^3 + 4$ г) $5.10^4 + 4.10^2 + 4.10$

**Решение:**

54 040 $\Longrightarrow$

0 единици ($0$), 4 десетици ($4.10$), 0 стотици ($0.10^2$) , 4 хиляди ($4.10^3$) и 5 десетохиляди ($5.10^4$)

$\Longrightarrow 5.10^4 + 5.10^3 + 0.10^2 + 4.10 + 0$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) $5.10^4 + 4.10^3 + 4.10.$

**Задача 13. (6 - 2009)**

Сборът $5.10^3 + 2.10^2 + 7.10^0 + 8.10^{-2} + 10^{-3}$ е равен на:

а) 527,081 б) 527,81 в) 5207,081 г) 5207,81

**Решение:**

$5.10^3 + 2.10^2 + 7.10^0 + 8.10^{-2} + 10^{-3} \Longrightarrow$ 5 хиляди, 2 стотици, 7 единици, 0 десети, 8 стотни и 1 хилядна $\Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) 5207,081.

**Задача 14. (7 - 2009)**

Кое от равенствата НЕ е вярно?

а) $3^4.3^4 = 3^8$ б) $(4^3)^3 = 4^9$ в) $2^3.2^7 = 4^{10}$ г) $5^6:5^2 = 5^4$

**Решение:**

$\mathbf{3^4.3^4} = 3^{4+4} = 3^8$

$(\mathbf{4^3})^3 = 4^{3.3} = 4^9$

$2^3.2^7 = 2^{3+7} = 2^{10} \neq 4^{10}$

$\mathbf{5^6:5^2} = 5^{6-2} = 5^4$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) $2^3.2^7 = 4^{10}$.

**Задача 15. (8 - 2009)**

Кое от твърденията е вярно?

а) противоположното на числото $\frac{1}{2}$ е $-(-0{,}5)$

б) $|a|$ е положително число за всяко рационално число $a$

в) 2,5 и $-2\frac{1}{2}$ не са противоположни

г) всяко цяло число е рационално

**Решение:**

Сред посочените твърдения, проверяваме дали всяко от тях е вярно:

противоположното на числото $\frac{1}{2}$ е $-\frac{1}{2} = -0{,}5 \neq -(-0{,}5) \Longrightarrow$ а) е грешно;

$|0| = 0 \Longrightarrow$ б) е грешно;

противоположното на числото 2,5 е $-2{,}5 \Longrightarrow$ в) е грешно

**Остава само едно твърдение, което е вярно:**

всяко цяло число е рационално, защото цялото число $N$ е $\frac{N}{1}$, т.е. всяко цяло число може да се представи като обикновена дроб с числител $N$ и знаменател 1.

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) всяко цяло число е рационално.

**Задача 16. (22 - 2010)**

Вярно е, че:

а) $|-3{,}14| = \pi$ б) $|\pi| = \frac{22}{7}$ в) $|-0| = -0$ г) $\left|-\frac{22}{7}\right| = 3{,}14$

**Решение:**

Числото $\pi$ е безкрайна **не**периодична дроб и **не е рационално число.**

$|-3{,}14| = 3{,}14$ е рационално число, рационално число е и $\frac{22}{7}$.

Затова не са верни а) $|-3{,}14| = \pi$ и б) $|\pi| = \frac{22}{7}$.

Десетичната дроб 3,14 и обикновената дроб $\frac{22}{7}$ се използват често за приблизително смятане.

Не е вярно и

г) $\left|-\frac{22}{7}\right| = 3{,}14$, защото $\left|-\frac{22}{7}\right| = 3,(142857) > 3{,}14$

Остава само едно твърдение, което е вярно: в) $|-0| = -0$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) $|-0| = -0$.

**Задача 17. (9 - 2009)**

На колко е равен сборът на всичките цели числа, чиято абсолютна стойност е по-голяма от 1 и по-малка от 3?

а) $-4$ б) 4 в) 2 г) 0

**Решение:** Ако $1 < |x| < 3 \Longrightarrow x = 2$ и $-2$.

Търсим сбора на числата - 2 и 2. Той е 0.

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) 0.

**Задача 18. (10 - 2009)**

Произведението $-25.(-3{,}126).(-4)$ е равно на:

а) 312,6 б) – 312,6 в) 3126 г) 3,126

**Решение:** $-25.(-3{,}126).(-4) = -25.(-4).(-3{,}126) = 100.(-3{,}126) = -312{,}6$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) – 312,6.

**Задача 19. (11 - 2009)**

Стойността на кой от изразите е най-голяма?

а) 3,4 – 7,28 б) - 7,2 : 0,4 в) − 24.5 г) - 12,4 + 4,06

**Решение:**

а) 3,4 – 7,28 = - 3, 88 б) - 7,2 : 0,4 = -72: 4 = -18 в) − 24.5 = - 120 г) - 12,4 + 4,06 = - 8,34

$$-120 < -72 < -18 < -8{,}34 < -3{,}88$$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) 3,4 – 7,28.

**Задача 20. (12 - 2009)**

Стойността на израза 5 – 5:2 е равна на:

а) 0 б) 2,5 в) – 2,5 г) – 7,5

**Решение:**

5 – 5:2 = 5 – 2,5 = 2,5 $\Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) 2,5.

**Задача 21. (13 - 2009)**

Стойността на израза $-5{,}3.7 - 7.(-2)$ е равна на:

а) -51,1 б) 51,1 в) 23,1 г) – 23,1

**Решение:**

$-5{,}3.7 - 7.(-2) = -37{,}1 + 14 = -23{,}1 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) – 23,1.

**Задача 22. (8 - 2010)**

$$6:(-2) - \frac{9}{4}.\frac{8}{3} =$$

а) − 9 б) $-\frac{84}{12}$ в) $\frac{84}{12}$ г) 9

**Решение:**

$6:(-2)-\frac{9}{4}.\frac{8}{3}=-3-6=-9 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) – 9.

**Задача 23. (14 - 2009)**

За коя стойност на $x$ е вярно равенството

$$3\frac{1}{2}+2x=-2\ ?$$

а) $\frac{3}{4}$ б) $2\frac{3}{4}$ в) $-2\frac{3}{4}$ г) $-\frac{4}{11}$

**Решение:**

$3\frac{1}{2}+2x=-2 \iff \frac{7}{2}+2x=-2 \iff 7+4x=-4 \iff 4x=-4-7 \iff x=-\frac{11}{4} \iff x=-2\frac{3}{4}$

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) $-2\frac{3}{4}$.

**Задача 24. (19 - 2010)**

Намерете $x$ , ако $0{,}2x=-5$.

а) $-25$ б) $-1$ в) 1 г) 25

**Решение:**

$0{,}2x=-5 \iff x=-5:0{,}2 \iff x=-50:2 \iff x=-25 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) $-25$.

**Задача 25. (11 - 2010)**

Намерете стойността на израза $2{,}5\,p-1{,}5\,q$ при $p=-4$, $q=2$.

а) $-7$ б) $-9$ в) 10,5 г) $-13$

**Решение:**

$2{,}5\,.(-4)-1{,}5.2=-10-3=-13 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) $-13$.

**Задача 26. (21 - 2010)**

Срочната оценка е средноаритметичното от получените оценки през срока. Каква оценка трябва да получи за срока ученик, който през срока е получил една шестица и две тройки по математика?

а) 6 б) 5 в) 4 г) 3

**Решение:**

$\frac{1.6+2.3}{1+2} = \frac{12}{3} = 4 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) 4.

**Задача 27. (16 - 2009)**

На колко е равно лицето на кръг с радиус 6 см, ако $\pi \approx 3{,}14$?

а) 113,04 см б) 18,84 $cm^2$ в) 113,04 $cm^2$ г) 34,68 $cm^2$

**Решение:**

$\left| \begin{array}{l} S = \pi.r^2 \\ r = 6 \\ \pi \approx 3{,}14 \end{array} \right. \Longrightarrow S \approx 3{,}14.6^2 = 3{,}14.36 = 113{,}04 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) 113,04 $cm^2$.

**Задача 28. (9 - 2010)**

Колко сантиметра е обиколката на окръжност с диаметър 8 см?

а) $8\pi^2$ б) 16 π в) 8 π г) 64 π

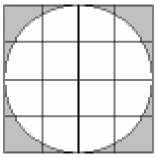
**Решение:**

$\left| \begin{array}{l} C = 2.\pi.r = \pi.d \\ d = 8 \end{array} \right. \Longrightarrow C = 8\pi \Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) 8 π.

**Задача 29. (18 - 2009)**

Ако страната на едно квадратче е 1 cm и π ≈ 3,14, то лицето на оцветената част е равно на:

а) 28,56 $cm^2$ б) 3,44 $cm^2$ в) 12,56 $cm^2$ г) 16 $cm^2$



**Решение:**

Лицето на оцветената част ще получим като от лицето на квадрата извадим лицето на кръга. Квадратът е със страна 4 см и има лице 4 см .4 см = 16 кв. см, а кръгът е с радиус 2 см и има лице 3,14.4 кв. см.

Записваме 4.4 – 3,14.4 = 0,86.4 = 3,44 $\Longrightarrow$ 3,44 $cm^2 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) 3,44 $cm^2$.

**Задача 30. (19 - 2009)**

Ако радиусът на окръжност е намален 2 пъти, то дължината на окръжността ще се намали:

а) 6 пъти б) 4 пъти в) 2 пъти г) 3 пъти

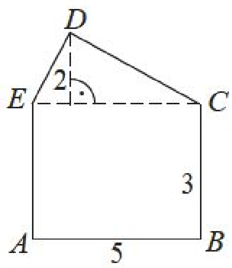
**Решение:**

$C_1 = 2.\pi.r$

$C_2 = 2.\pi.\frac{r}{2} \Longrightarrow C_2 = \pi.r \ \Longrightarrow C_1 = 2.C_2 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** в) 2 пъти.

**Задача 31. (20 - 2010)**

По данните от чертежа определете лицето на петоъгълника *ABCDE* в съответните квадратни единици, ако *ABCE* е правоъгълник.




а) 30 б) 20 в) 17 г) 11

**Решение:**

Лицето на петоъгълника *ABCDE* е сбор от лицата на триъгълника *ECD* и правоъгълника *ABCE*, т.е. $\frac{1}{2}.5.2 + 5.3 = 5 + 15 = 20 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) 20.

**Задача 32. (21 - 2009)**

Правилна четириъгълна пирамида има обем 75 $cm^3$ и височина 9 см. На колко е равна страната на основата на тази пирамида?

а) 5 см б) 5 дм в) 50 м г) 15 см

**Решение:**

Нека с *V*, *B*, *H* и *a* са съответно обема, лицето на основата, височината на пирамидата, страната на основата. Тогава:

$\left| \begin{array}{l} V = 75 \\ h = 9 \\ V = \frac{1}{3}.B.h \end{array} \right. \Rightarrow 75 = \frac{1}{3}.B.9 \Rightarrow B = 25 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$ **Верен отговор:** а) 5 см

**Задача 33. (14 - 2010)**

Основният и околният ръб на правилна петоъгълна призма са равни. Колко квадратни сантиметра е околната повърхнина на призмата, ако периметърът на основата е 10 см?

а) 50 б) 30 в) 20 г) 10

**Решение:**

Страната на основите е 10 см : 5 = 2 см. Тогава и околния ръб е 2 см.

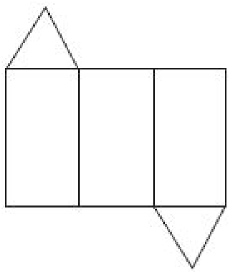
Околната повърхнина е съставена от 5 квадрата със страна 2 см.

Тогава лицето й е 5.2.2 = 20 квадратни сантиметра.

$\Rightarrow$ **Верен отговор:** в) 20.

**Задача 34. (16 - 2010)**

На кое геометрично тяло е развивката от чертежа?



а) триъгълна пирамида б) четириъгълна призма

в) четириъгълна пирамида г) триъгълна призма

**Верен отговор:** г) триъгълна призма.

**Задача 35. (17 - 2009)**

Кое от числата 18; 21; 6 и 30 НЕ е брой на всичките ръбове на правилна призма?

а) 18 б) 21 в) 6 г) 30

**Решение:**

Ако основите са $n$ –ъгълници ($n \geq 3$) тогава броя на основните ръбове е $2n$, броя на околните ръбове е $n$.Всички ръбове са $3n$, където $n$ е най-малко 3 $\Rightarrow 3n$ е най-малко 9.

Тогава търсеното число е 6 $\Rightarrow$ **Верен отговор:** в) 6.

**Задача 36. (20 - 2009)**

Лицето на повърхнината (пълната повърхнина) на цилиндър с радиус 2 см, образуваща 60 мм е равно на:

а) 16π $cm^2$ б) 24π $cm^2$ в) 12π $cm^2$ г) 32π $cm^2$

**Решение:**

$$\left| \begin{array}{c} S_1 = 2.\pi.r.(r+h) \\ r = 2cm \\ l = h = 60\ mm = 6mm \end{array} \right. \Longrightarrow S_1 = 2.\pi.2.(2+6) = 32.\pi$$ ⟹ **Верен отговор:** г) 32π $cm^2$.

**Задача 37. (15 - 2010)**

Ако радиусът на цилиндър е $\frac{2}{3}$ от височината му, която е 6 см, то колко кубични сантиметра е обемът на цилиндъра?

а) 96 π б) 96 в) 144 π г) 144

**Решение:**

$$\left| \begin{array}{c} V = \pi.r^2.h \\ h = 6cm \\ r = \frac{2}{3}.h \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} V = \pi.r^2.h \\ h = 6cm \\ r = 4\ cm \end{array} \right. \Longrightarrow V = \pi.4^2.6 \Longrightarrow V = 96\pi$$ ⟹ **Верен отговор:** а) 96 π.

**Задача 38. (17 - 2010)**

Какво е отношението на обемите на две кълба, едното с радиус 2 дм, другото с радиус 3 дм?

а) π:1 б) 4:6 в) 8 : 27 г) 2:3

**Решение:**

$$\left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow V = \frac{32}{3}\pi \\ r = 2 \end{array} \right. \\ \left| \begin{array}{c} V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow V = \frac{108}{3}\pi \\ r = 3 \end{array} \right. \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{\frac{32}{3}\pi}{\frac{108}{3}\pi} = \frac{8}{27}$$ ⟹ **Верен отговор:** в) 8 : 27.

**Коментар:** Отношението на обемите е $\frac{r_1^3}{r_2^3}$.

**Задача 39. (18 - 2010)**

Правоъгълен триъгълник с катети $a$ = 3 cm, $b$ = 4 cm и хипотенуза 5 cm е завъртян около катета $a$ . Радиусът на получения конус е:

а) 5 см б) 4 см в) 3 см г) 1 см

**Решение:**

При завъртането около катета $a$, височината на получения конус ще е равна на катета $a$ = 3 $cm$, а радиуса на основата – на катета $b$ = 4 $cm$ $\Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) 4 см

**Задача 40. (23 - 2010)**

Тяло се движи със скорост 100 м/сек. Колко километра ще измине тялото за 1 час?

а) 3600 б) 360 в) 100 г) 60

**Решение:**

1 sek $=\frac{1}{60}$ min $= \frac{1}{60}.\frac{1}{60}$ h $= \frac{1}{3600}$ h 100 m $= \frac{1}{10}.1\ km = \frac{1}{10}\ km$

| $S\ (km)$ | $t(h)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{3600}$ |
| $x$ | 1 |

$\Longrightarrow \frac{\frac{1}{10}}{x} = \frac{\frac{1}{3600}}{1} \Longrightarrow x = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3600}} \Longrightarrow x = 360 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) 360.

**Задача 41. (24 - 2010)**

В сок от кайсии отношението на плода към водата е 3:2. Колко грама плод се съдържат в 100 г сок?

а) 60 г б) 80 г в) 100 г г) 120 г

**Решение:**

От 3:2 $\Longrightarrow$ плода е $3x$, а водата $2x$ $\Longrightarrow$ сока е $3x+2x = 5x$

Ако сока е 100 г $\Longrightarrow 5x = 100 \Longrightarrow x = 20 \Longrightarrow$ плодът в 100 грама сок е 3.20 г = 60 г

$\Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) 60 г.

**Задача 42. (25 - 2010)**

За два часа влак изминава 85 км. Километрите, които ще измине влакът за 5 часа са:

а) между 150 и 200 б) между 200 и 250

в) между 250 и 300 г) между 300 и 350

**Решение:**

| $S\ (km)$ | $t(h)$ |
|---|---|
| 85 | 2 |
| $x$ | 5 |

$\Longrightarrow \frac{85}{x} = \frac{2}{5} \Longrightarrow x = \frac{85}{\frac{2}{5}} \Longrightarrow x = \frac{425}{2} = 212{,}5\ km \Longrightarrow$ **Верен отговор:** б) между 200 и 250.

**Задача 43. (22 - 2009)**

Кои отношения образуват пропорция?

а) 12 : 18 и 8 : 12 б) 5 : 9 и 4 : 7,4 в) 3 : 14 и 4 : 21 г) 8 : 9 и 7 : 8

**Решение:**

$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ и $\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} \Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) 12 : 18 и 8 : 12.

**Задача 44. (23 - 2009)**

Автомобил изминава 250 км, като изразходва 15 л гориво. Разходът за 100 км е:

а) 6 л б) 37,5 л в) 60 л г) 0,6 л

**Решение:**

| $S\ (km)$ | *Разход гориво* $(l)$ |
|---|---|
| 250 | 15 |
| 100 | $x$ |

$\Longrightarrow \frac{250}{100} = \frac{15}{x} \Longrightarrow x = \frac{15.100}{250} \Longrightarrow x = 6 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) 6 л .

**Задача 45. (15 - 2009)**

Ако $2 : x = -4$, то $x$ е равно

а) 0 б) $-1$ в) 5 г) $-0{,}5$

**Решение:**

$2 : x = -4 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{-4}{1} \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-4} = -0{,}5 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** г) $-0{,}5$.

**Задача 46. (6 - 2010)**

Ако

$$\frac{x}{-4} = 2{,}5\,,$$

то на колко е равно $x$ ?

а) $-10$ б) $-0{,}625$ в) $0{,}625$ г) 10

**Решение:**

$\frac{x}{-4} = \frac{2{,}5}{1} \Leftrightarrow x = 2{,}5.(-4) \Leftrightarrow x = -10 \Longrightarrow$ **Верен отговор:** а) $-10$.

## ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

**Задача 1**. (*НВО за 7. клас,2020 г.*) През ноември цената на лаптоп била 1049 лв. За Коледа цената му била намалена с 10% от нея, а през януари била увеличена с 20% от новата цена. Цената на лаптопа (в лв.) след двете промени се изчислява с помощта на израза:

А) 1049 - 0,10

Б) 1049+ 0,20 . 1049

В) 1049 + ( 0,20 – 0,10) . 1049

Г) 1,20 .( 0,90 . 1049)

**Задача 2**. (*НВО за 7. клас, 2018 г.*) Търговец транспортира ежедневно картофи и царевица от зеленчукова борса. За превоза на картофи разходите му са 100 лв. първоначално и по 20 лв. на всеки тон. За царевицата разходите му са 80 лв. първоначално и по 15 лв. на всеки тон. В понеделник е превозил 3 тона картофи и 4 тона царевица, а във вторник – $x$ тона картофи и два пъти по-голямо количество царевица от картофите.

А) Пресметнете разходите на търговеца, които е направил в понеделник.

Б) Запишете с израз в нормален вид разходите на търговеца, които е направил във вторник.

**Задача 3**. (*НВО за 7. клас , 2010 г.*) Ако $a = -3$, то стойността на израза $a(a-1)-(a-2)$ е равна на:

А) 17 Б) 13 В) 5 Г) 1

**Задача 4**. (*от изпита след 7. клас, 2008 г.*) Стойността на израза

$$\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1+\frac{1}{4}\right).\left(1-\frac{1}{5}\right).\left(1+\frac{1}{6}\right)\dots.\left(1-\frac{1}{19}\right).\left(1+\frac{1}{20}\right)$$

е равна на:

А) 1 Б) $\frac{20}{21}$ В) 0,7 Г) 0,15

**Задача 5**. (*НВО за 7. клас , 2014*) Цената за пътуване с такси се определя по формулата $C = 1{,}20 + 0{,}80.k$, където $k$ са изминатите километри, а $C$ е цената в левове. От тази формула изминатите километри $k$ за дадена цена $C$ се определят така:

А) $k = (C-1{,}20):0{,}80$ Б) $k = (C+1{,}20).0{,}80$ В) $k = 0{,}80.C-1{,}20$ Г) $k = C:2{,}00$

**Тема № 2**

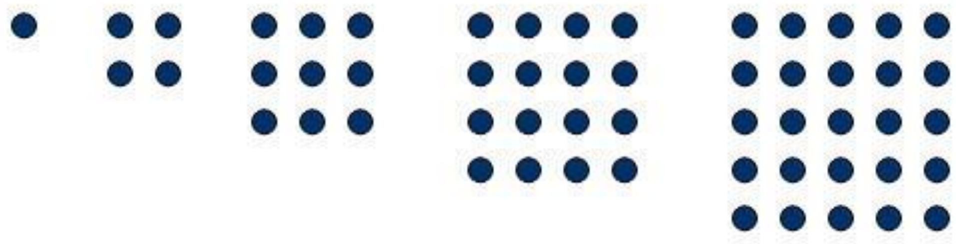
## ТОЧНИ КВАДРАТИ

Всяко цяло число, което може да се представи като произведение от два равни множителя, които също са цели числа, наричаме **точен квадрат** (на английски език: **square number** или **perfect square**).

Точните квадрати на числата от $0^2$ до $50^2$.

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, ...

**Геометрична интерпретация:**



**Точните квадрати имат за цифра на единиците 0, 1, 4, 5, 6 или 9.**

В таблицата са посочени възможните цифри на единиците на цялото число $x$ и съответните цифри на единици на $x^2$. Изчерпани са всички възможности:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

Точните квадрати **НЯМАТ** за цифра на единиците цифрите 2, 3, 7 и 8.

## НЯКОЛКО УВОДНИ ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Докажете, че ако сборът на квадратите на две цели числа е число, което се дели на 3, то всяко от събираемите също се дели на 3.

**Решение:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | **36** | **49** | **64** | **81** |
| *остатък при делението на $x^2$ на 3* | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** |

При делението на 3 точните квадрати дават остатък 0 или 1.

Нека двете цели числа са $a$ и $b$. Нека съставим таблицата

| $a^2/b^2$ | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | | |
| **1** | | |

В първия хоризонтален ред са остатъците при делението на $b^2$ на 3, а в първия вертикален стълб - на $a^2$ на 3.

| $a^2/b^2$ | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | **0** | |
| **1** | | |

Ако и $a^2$, и $b^2$ се делят на 3, т.е. остатъкът е 0, тогава във втори ред, втори стълб записваме остатъкът от делението на 0 + 0 на 3, т.е. 0.

Ако $a^2$ се дели на 3, а при делението на $b^2$ на 3 остатъкът е 1, тогава във втори ред, трети стълб записваме остатъкът от делението на 0 + 1 на 3, т.е. 0.

| $a^2/b^2$ | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **1** |
| **1** | | |

Пъпълваме таблицата и получаваме, че

| $a^2/b^2$ | **0** | **1** |
|---|---|---|
| **0** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **2** |

Тогава остатъците при делението на $a^2 + b^2$ на 3 са 0, 1 или 2.

Това не е изненада ☺

**По - важно е, че** сборът от квадратите на $a$ и $b$ се дели на 3 само когато и двете числа се делят на 3.

**Задача 2.** Докажете, че ако сборът на квадратите на две цели числа е число, което се дели на 7, то всяко от събираемите също се дели на 7.

**Решение:**

| $x^2$ | **0** | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | **36** | **49** | **64** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *остатък при делението на $x^2$ на 7* | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | 0 | 1 |

При делението на 7 точните квадрати дават остатък 0, 1, 2 или 4.

Нека 7 да дели $a^2 + b^2$, тогава от

| $a^2/b^2$ | **0** | **1** | **2** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **1** | **2** | **4** |
| **1** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **2** | **2** | **3** | **4** | **6** |
| **4** | **0** | **5** | **6** | **1** |

установяваме, че остатък 0 се получава, когато и двете числа се делят на 7.

## ЗАДАЧИ ОТ СЪКРОВИЩНИЦАТА НА СПИСАНИЕ МАТЕМАТИКА и СПИСАНИЕ КВАНТ

**Задача 3.** Нека $n$ е естествено число, за което всяко от числата $2n + 1$ и $3n + 1$ е точен квадрат.

а) Да се докаже, че $n$ се дели на 40.

б) Да се намери най-малкото естествено число $n$, за което числата $2n + 1$ и $3n + 1$ са точни квадрати.

**Решение:**

а) Последната цифра на число, което е точен квадрат, може да е 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

Да разгледаме възможностите за последна цифра на $n$ и във всеки от случаите да намерим последната цифра на $2n + 1$ и $3n + 1$:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2n + 1$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| $3n + 1$ | 1 | 4 | 7 | 0 | 3 | 6 | 9 | 2 | 5 | 8 |

Виждаме, че числата $2n + 1$ и $3n + 1$ едновременно имат последна цифра 0, 1, 4, 5, 6 или 9 само когато $n$ завършва на 0 или 5. Следователно $n$ се дели на 5. Точните квадрати при деление на 8 дават остатък 1, 4 или 0.

Да разгледаме възможните остатъци на $n$ при деление на 8 и във всеки от случаите да намерим остатъка при деление на 8 на $2n + 1$ и $3n + 1$:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2n + 1$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $3n + 1$ | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 |

Виждаме, че числата $2n + 1$ и $3n + 1$ едновременно дават остатък 1, 4 или 0 при деление на 8 само когато $n$ дава остатък 0, т.е. се дели на 8. Така получихме, че $n$ се дели на 5 и на 8, следователно и на 40.

б) Най-малкото кратно на 40 е самото 40 и за него

$$2.40 + 1 = 81 = 9^2 \text{ и } 3.40 + 1 = 121 = 11^2.$$

Следователно търсеното число е 40.

*Забележка.* В решението използвахме, че точните квадрати дават остатък 0, 1 или 4 при деление на 8. В това може да се убедим, като разгледаме възможните остатъци при деление на 8 на произволно число $a$ и пресметнем остатъка на неговия квадрат $a^2$ при деление на 8:

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^2$ | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

От таблицата виждаме, че $a^2$ дава остатък 0, 1 или 4 при деление на 8.

По същия начин може да се докаже и твърдението, че последната цифра на $a^2$ е 0, 1, 4, 5, 6 или 9.

**Задача 4.** Да се докаже, че измежду всеки девет различни делители на $30^{100}$ могат да се изберат два, произведението на които е точен квадрат.

**Решение:**

Тъй като простите делители на $30^{100}$ са числата 2, 3, и 5, всеки от делителите на това число ще има вида $2^a \,.\, 3^b \,.\, 5^c$, където $a$, $b$ и$c$ са цели неотрицателни числа. Всеки от разглежданите 9 делители се определя от тройката $(a, b, c)$.

На всяка от тези тройки съпоставяме тройката $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, съставена от 0 или 1, като

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, \text{ако } a \text{ е четно число} \\ 1, \text{ако } a \text{ е нечетно число} \end{cases}$$

Броят на различните тройки от 0 и 1 е 8 (те са 000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111). Следователно на поне два от разглежданите 9 делители е съпоставена една и съща тройка. Това означава, че в разлагането на тези два делителя степенните показатели на 2 са с една и съща четност, степенните показатели на 3 са с една и съща четност и степенните показатели на 5 са с една и съща четност. Следователно в произведението на тези два делителя степенните показатели на 2, на 3 и на 5 са четни, т.е. произведението е точен квадрат.

**Задача 5.** Нека $d$ е естествено число, различно от 2, 5 и 13.

Да се докаже, че от множеството {2, 5, 13, $d$} могат да се изберат две различни числа $a$ и $b$ така, че $a.b$ – 1 да не е точен квадрат.

**Решение:**

Ще докажем, че за всяко естествено число $d$ поне едно от числата

$2.d\, -\, 1, 5.d\, -\, 1$ и $13.d\, -\, 1$ не е точен квадрат.

Ще използваме остатъците на точните квадрати при деление на 16.

| Остатък на $n$ | 0 | $\pm 1$ | $\pm 2$ | $\pm 3$ | $\pm 4$ | $\pm 5$ | $\pm 6$ | $\pm 7$ | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Остатък на$n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 0 | 9 | 4 | 1 | 0 |

От таблицата виждаме, че точните квадрати дават остатък 0, 1, 4 или 9 при деление на 16. (За по-кратко записване, остатък 15 сме заменили с остатък −1, 14 с −2 и т.н.)

Да допуснем, че за някое естествено число $d$ и трите числа $2.d - 1, 5.d - 1$ и $13.d - 1$ са точни квадрати.

Число $2d-1$ е точен квадрат и е нечетно, следователно $2d - 1$ дава остатък 1 или 9 при деление на 16.

Това означава, че $d$ дава остатък 1, 5, 9 или 13 при деление на 16.

В тези случаи да разгледаме съответните остатъци на $5d-1$ и $13d-1$ при деление на 16.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| остатък на $d$ | 1 | 5 | 9 | 13 |
| остатък на $5d - 1$ | 4 | 8 | 12 | 4 |
| остатък на $13d - 1$ | 12 | 4 | 4 | 8 |

Виждаме, че в нито един от четирите случая не е възможно $5d-1$ и $13d-1$ едновременно да са точни квадрати, т.е. едновременно да дават остатък 0, 1, 4 или 9 при деление на 16. Полученото противоречие означава, че поне едно от числата $2.d-1, 5.d-1$ и $13.d-1$ не е точен квадрат.

**Задача 6.** Числото $n$ е цяло и е точен квадрат. Сборът от цифрите му е 22, цифрата на стотиците му е 3, цифрата на десетиците е 7 и няма повтарящи се цифри в неговия десетичен запис. Да се намери най-малкото такова число. Отговорът да се обоснове!

**Решение:**

Точните квадрати завършват на 0, 1, 4, 5, 6, или 9. Освен това точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 4. Следователно търсеното число не може да завършва на 70, 71, 74, 75 и 79. Остава единствената възможност последната цифра да е 6. Тъй като числото завършва на 376, то се дели на 8 и тъй като е точен квадрат, се дели и на 16. Следователно цифрата на хилядите му е нечетна. Такова четирицифрено число със сбор на цифрите 22 няма. Петцифрените числа, които удовлетворяват горните условия, са 51376, 33376 и 15376. Най-малкото от тях 15376 е точен квадрат (15376 = 124.124).

**ЧАСТ ОТ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ НАЦИОНАЛНАТА ОЛИМПИАДА за 9. клас ПРЕЗ ФЕВРУАРИ 2020**

**Задача 7.** Съществуват ли четири последователни естествени числа, всяко от които може да се представи като сбор на два (не непременно различни) квадрата на цели числа?

**Решение:**

Ако едно число е квадрат на естествено число, то или се дели на 4, или при делението на 8 дава остатък 1.

Ако едно число е представено като сбор на два квадрата, то при делението на 4 се получават остатъци 0, 1 или 2.

Сред четири последователни числа обаче само едно се дели на 4 с остатък 3.

Следователно НЕ съществуват 4 последователни числа, всяко от които може да се представи като сбор на квадратите на две цели числа.

При деление на 8, квадратът на едно число дава остатък 0,1 и 4.

Сборът от квадратите на две числа, при делението на 8 дава остатък 0, 1, 2, 4, и 5.

## ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

**Задача 8.** Кои са възможните стойности на цифрата на десетиците на число, което е точен квадрат и има за цифра на единиците 5?

**Задача 9.** Може ли сборът на 13 последователни числа да бъде точен квадрат?

**Задача 10.** Колко са тройките последователни естествени числа, сред числата от 1 до 100, всяко от които се представя като сбор на два (не непременно различни) квадрата на цели числа?

**Задача 11.** Нека $m$ и $n$ са две естествени числа, такива че $m + n$ е нечетно число.
Да се докаже, че $13^m + 13^n$ може да се представи като сбор на три точни квадрата;

**Задача 12.** Нека $m$ и $n$ са две естествени числа, такива че $m + n$ е нечетно число.
Да се докаже, че $13^m + 13^n$ не може да се представи като сбор на два взаимно прости точни квадрата.