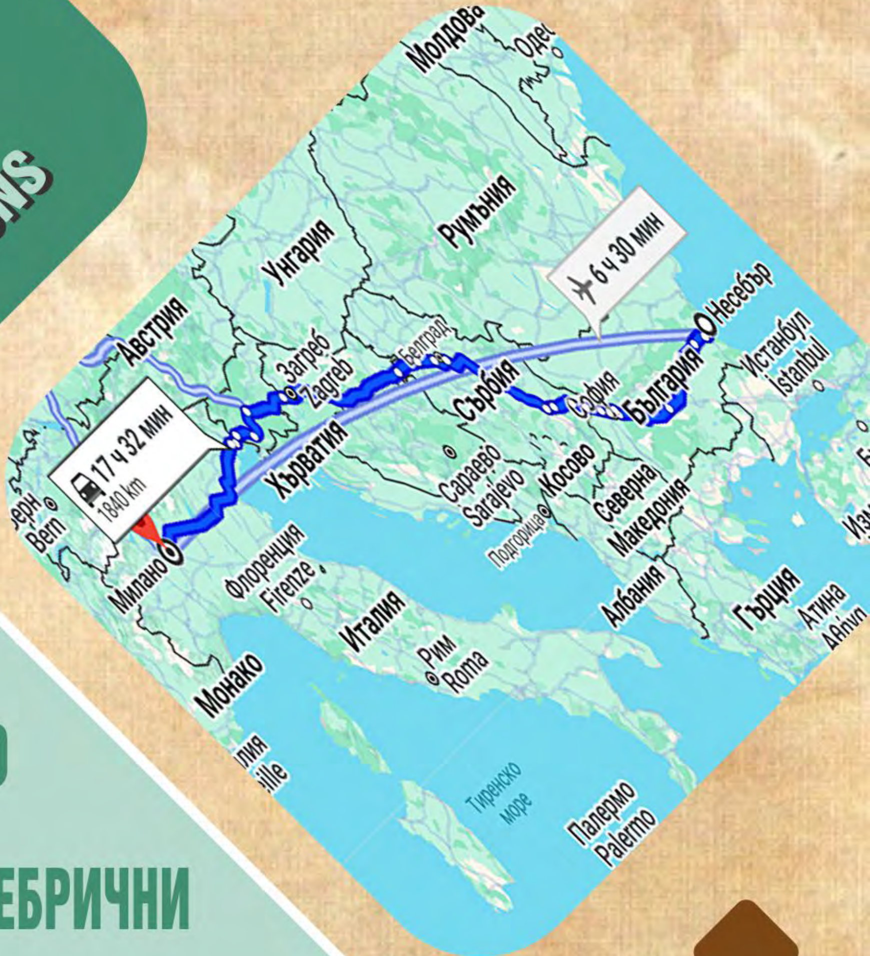
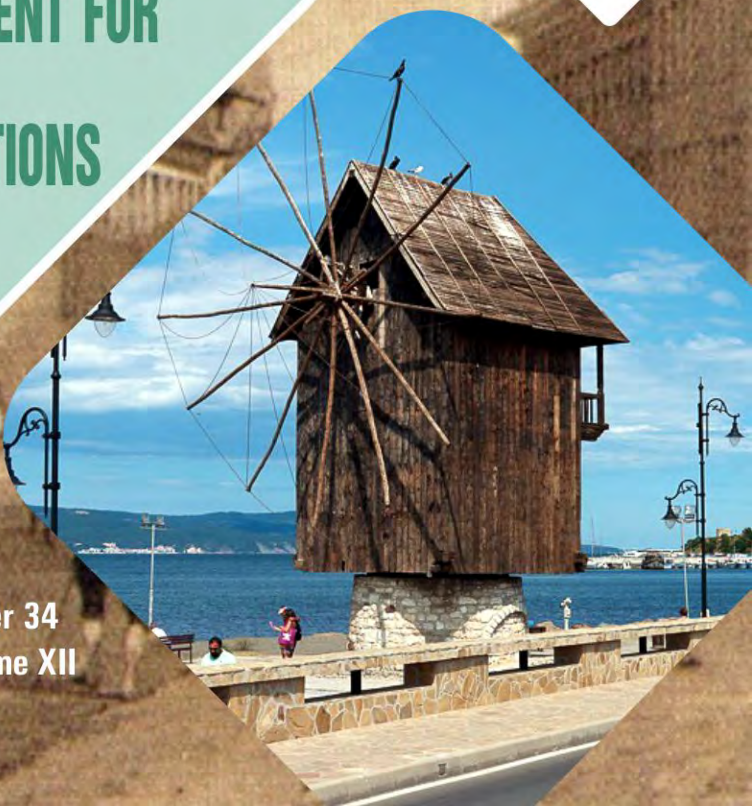
ОБРАЗОВАНИЕ БЕЗ ГРАНИЦИ - МОТИВИ, РЕАЛИЗАЦИЯ, АМБИЦИИ

EDUCATION WITHOUT BORDERS - OBJECTIVES, REALIZATION, AMBITIONS



ТУРНИР ПО РЕШАВАНЕ НА АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ И РЕБУСИ LODOVICO FERRARI

LODOVICO FERRARI TOURNAMENT FOR SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS AND PUZZLES



Брой 34 / Number 34
Година XII / Volume XII
2025

ОБЩИНА СТАРА ЗАГОРА

6000 СТАРА ЗАГОРА, бул. „Цар Симеон Велики" 107, тел. 042/ 614 614, факс 042/ 601 103
www.starazagora.bg, mayor@starazagora.bg

ПОЗДРАВИТЕЛЕН АДРЕС

УВАЖАЕМИ Г-Н ЛЮБЕНОВ,
УВАЖАЕМИ МЛАДИ МАТЕМАТИЦИ,

Приемете моите сърдечни поздрави по повод изключителния успех, който постигнахте в третото поредно математическо състезание „Стара Загора търси Математически таланти" – 2024 г. Искрено Ви благодаря за всеотдайния труд, който полагате да възпитавате и обучавате младите надежди на Стара Загора.

Убедена съм, че този престижен форум се утвърждава като едно изключително събитие в математическите среди.

Уважаеми млади математици, запазете своя устрем, продължавайте с хъс да покорявате математическите върхове и винаги пазете искрата на знанието. Вярвам, че получените знания ще Ви помогнат да разгърнете своя пълен потенциал в бъдеще.

Пожелавам Ви здраве, лично щастие, творческа енергия, силен дух и вяра в науката.

СВЕТЛИ КОЛЕДНИ И НОВОГОДИШНИ ПРАЗНЦИ!

НАДЕЖДА ЧАКЪРОВА
Заместник-кмет на Община Стара Загора

ISSN 2367-654X

CONTENT **Page**

ИСТОРИЯТА

Италия, люлката на Ренесанса, е дала на човечеството според Феликс Клайн това „Велико изкуство“ – алгебричното решаване на кубичните уравнения.

Преди повече от четири столетия в Италия се провеждали математически дуели по решаване на алгебрични уравнения.

Сред участниците били Сципион дел Феро, Николо Тарталия, Джеронимо Кардано, Лодовико Ферари ….

Сципион дел Феро (Scipione del Ferro, 1465–1526)

е професор в Болонския университет. За него се говорело, че владеел тайната как се решава алгебрично уравнение от трета степен. Той не споделил с всички тази своя тайна. През 1535 година неговия ученик

Фиори (Antonio Maria del Fiore)

обявил, че кани на състезание всеки, който дръзне да противопостави своята дарба за решаване на уравнения. Поканата стигнала и до

Николо Тарталия (Niccolò Tartaglia, около 1500–1557)

Николо Тарталия приел поканата. Размишлявал няколко дена и съпоставял фактите. Достигнал до извода, че Фиори малко преди смъртта си е научил от Сципион дел Феро начина за решаване на алгебрично уравнение от трета степен. Затова и не се стъписал от факта, че 30-те задачи, предложени от Фиори са уравнения само от вида $x^3 + ax = b$, при различни стойности на параметрите a и b.

Когато почти приключил срокът за решаване на уравненията, до Тарталя достигнал слух, че все пак Фиори знае как се решават тези уравнения. Перспективата да загуби двубоя го мотивирала да намери начин за решаване на уравненията буквално няколко часа до началото на състезанието. В резултат на това Тарталя постигнал победа, защото за по-малко от 2 часа решил всички уравнения, предложени от Феро, а той от своя страна предложил на противника си 30 разнообразни задачи от различни области на математиката, от които Феро не решил нито една. Веднага след това Тарталия открива и начин за решаване на уравнението $x^3 = ax + b$.

След победата в този двубой Тарталия спечелил много приятели. Един от тях бил

Джероламо Кардано (Gerolamo Cardano, 1501–1576)

След като чул за постиженията на Тарталя той за първи път публикува формулата за решаване на уравнения от трета степен, която е известна и до ден днешен като „формула на Кардано“.

На това Тарталя откликва „*Предайте на Негова Светлост, че ако аз исках да публикувам своето откритие, аз щях да го публикувам в собствен труд, а не в книгите на някой друг*“. Така или иначе това недоразумение, въпреки усилията на двамата, е неразрешено и така и до днес говорим за „формулата на Кардано“. В математическите си занимания Кардано е бил подпомаган от младия

Лодовико Ферари (Lodovico Ferrari, 1522–1565)

През 1543 г. двамата – Джероламо Кардано и Лодовико Ферари, търсят и намират метода, предложен от Сципион дел Феро. Убедили се, че този метод съвпада с метода на Тарталя.

По-късно Лодовико Ферари открива метод за решаване на уравнения от четвърта степен, като използване формулата за решаване на уравнение от трета степен.

„*През 1548 година Луиджи Ферари предизвиква на „*математически дуел*“ професора по математика от Венеция Николо Тарталя, който по това време се считал за един от най-силните математици на Италия. Същият Николо Тарталя, който побеждава в предишен дуел Фиори. Двубоят Ферари – Тарталя трябвало да се състои в решаване на по 30 задачи, предложени от всеки на другия в рамките на 50 дни. Тези решения трябвало да бъдат демонстрирани на публичен диспут в църквата пред избрано жури*“.

Побеждава Луиджи Ферари.

Публиката, която присъствала на дуела крещяла и ръкопляскала в чест на победителя…

„*Зад тях тълпата поздравявала с буйни крясъци и ръкопляскания „победителя“ в диспута Луиджи Ферари – „румения юноша с нежен глас, весело лице, грамадни способности и дяволски характер“, както пишат за него съвременниците му*“. (от книгата Николай Кованцов)

Църквата Санта Мария дел Джардино в Милано, разрушена през 19 век, където на 10 август 1548 г. се е провело последното състезание между Тарталия и Ферари

ГЕРОИТЕ

от математическите дуели, след които тълпата приветствала победителя…

Тарталя продължава да работи във Венеция като професор по математика и пише още няколко книги.

Ферари се радва на голям успех и уважение, четял публични лекции в Рим, участва в управлението на университета в Милано.

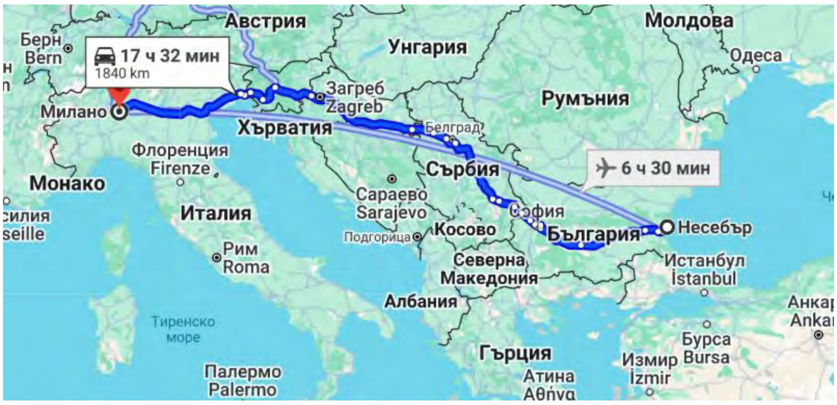
Кардано обаче не се е радвал на щастлив живот. През 1570 година бил арестуван, измъчван и по-късно екзекутиран. Преди да бъде арестуван той унищожава всичките си 120 книги. Причината за ареста е неизвестна.

СЛЕД ПОВЕЧЕ ОТ 400 ГОДИНИ

ние четем и говорим за тях и посветихме турнир

През 2021 г., в чест на 500 години от рождението на Лодовико Ферари, пворедохме турнир за решаване на алгебрични уравнения „Лодовико Ферари“. Първия финал проведохме през август 2021 г. в Несебър. Следващите финали бяха през 2022, 2023 и 2024 г.

Предстои пети финал – отново в Несебър през 2025 г.



На 1840 км от Милано, в Несебър, се провеждат състезания в чест на Лодовико Ферари. Почти 500 години по-късно.

MILANO	NESSEBAR
	

ПОБЕДИТЕЛИТЕ

НЕСЕБЪР 2021

ЗЛАТНА КУПА (GOLD CUP)

Сара Илиева (7 клас, ПЧМГ, гр. София); Стела Бинева (8 клас, ПМГ „Акад. Б. Петканчин“, гр. Хасково); Ясен Пенчев (9 клас, ППМГ „Акад. Ив.Гюзелев“, гр. Габрово); Мария Дренчева (9 клас, СМГ); Jitendra Barua (Bangladesh, Chattogram, 8); Tahmid Fuad (Bangladesh, Khulna, 7); Zayfert Yaroslava (Kazakhstan, Ust-Kamenogorsk, 10)

СРЕБЪРНА КУПА (SILVER CUP)

Денис Сираков (7 клас, ППМГ „Добри Чинтулов“, гр. Сливен); Велислав Джелепов (7 клас, МГ „Акад. Кирил Попов“, гр. Пловдив); Ванеса Фудулска (9 клас, ПМГ „Проф. Емануил Иванов“, гр. Кюстендил); Георги Игнатов (11 клас, ППМГ „Акад. Иван Ценов“, гр. Враца); Arystanbek Kozhataev (Kazakhstan, Ust-Kamenogorsk, 7); Georgiy Cherepanov (Kazakhstan, Ust-Kamenogorsk, 7); Sagnik Roy Arnab (Bangladesh, Rangpur, St. Philip's High School and College, 7); Rabijit Chandra Paul (Bangladesh, Chattogram, 9)

БРОНЗОВА КУПА (BRONZE CUP)

Радослав Балкански (7 клас, ППМГ „Гео Милев“, гр. Стара Загора); Кристин Костадинова (8 клас, ППМГ „Акад. Н. Обрешков“, гр. Бургас); Иван Канев (8 клас, ПГКНМА „Проф. Минко Балкански“, гр. Стара Загора); Дориана Петкова (8 клас, ППМГ „Акад. Н. Обрешков“, гр. Бургас); Мартин Петров(10 клас, ГПЧЕ „Ромен Ролан“, гр. Стара Загора); Деян Тасев(9 клас, ПМГ „Хр. Смирненски“, гр. Перник); Berezhok Nikita(Russia, Elizovo, EFMSH, 9); Glembotskii Egor(Russia, Elizovo, 7); Habiba Sultana(Bangladesh, Dhaka, S.V. Govt. Girls' High School, Kishoreganj,7); Latyshev Evgenii(Russia, Elizovo, 7); Mahi Mahabub(Bangladesh, Rangpur, Rangpur Zilla School, 7); Md. Ha-mim Adnan (Bangladesh, Rangpur Rangpur Zilla School, Rangpur, 7); Sheigerevich Cheslav(Russia, Elizovo, 7)

НЕСЕБЪР 2022

ЗЛАТНА КУПА

Viktor Kaloyanov Vanev (Bulgaria), Vladimir Djurica (Serbia), Janko Popovic (Serbia), Mina Mijatovic (Serbia), Vojin Bojic (Serbia), Georgi Gospodinov (Bulgaria)

СРЕБЪРНА КУПА

Denis Nikolaev Sirakov (Bulgaria)q Janko Stokic (Serbia), Ljiljana Konjevic (Serbia), Georgi Tsvetelinov Ignatov (Bulgaria), Yoan Yordanov (Bulgaria), Novak Despotovic (Serbia)

БРОНЗОВА КУПА

Martin Petrov Petrov (Bulgaria), Ken-Erik Aus (Estonia), Yoana Valerieva Anastasova (Bulgaria), Vladimir Brankovic (Serbia), Kondybayev Bekzat (Kazakhstan**)**

НЕСЕБЪР 2023

ЗЛАТНА КУПА GOLD CUP

Stojadinovic Jovan (Serbia, Belgrade), Valentin Naydenov Mitev (Bulgaria Burgas), Denis Nikolaev Sirakov (Bulgaria Sliven), Dimana Pramatarova (Bulgaria, Plovdiv), Trajkovic Marko (Serbia, Belgrade), Bojic Vojin (Serbia, Belgrade), Chavdar Chukov (Bulgaria, Stara Zagora)

СРЕБЪРНА КУПА SILVER CUP

Jelovac Vanja (Serbia, Belgrade), Janko Stokic (Serbia, Pozega), Mihailovic Jovan (Serbia, Belgrade), Mijatovic Mina (Serbia, Belgrade), Yoan Yordanov (Bulgaria, Stara Zagora)

БРОНЗОВА КУПА BRONZE CUP

Tesevic Anja (Serbia, Belgrade), Ivanimira Krasimirova Nedelcheva (Bulgaria, Sofia), Andreya Pencheva Zagorska (Bulgaria, Sofia), Andric Vojislav (Serbia, Belgrade), Ivan Diyanov Kanev (Bulgaria, Stara Zagora), Anna Milena Linder (Estonia, Tallinn**)**

НЕСЕБЪР 2024

ЗЛАТНИ МЕДАЛИСТИ

Akmalov Shakhzodbek (3; Uzbekistan); Aleksandar Georgiev Kimenov (10; Bulgaria); Alibaeva Madinabonu (1; Uzbekistan); Dimana Miroslavova Pramatarova (10; Bulgraria); Dimitar Svetoslavov Kermanov (7; Bulgaria); Djurica Vladimir (10; Serbia); Emilian Simeonov Nikolov (7; Bulgaria); Georgi Tihomirov Milkov (6; Bulgaria); Hristo Yordanov Botev (6;Bulgaria); ISTRATE DARIUS (6; Romania); Iva Ivanova Ichevska (12; Bulgaria); Ivelina Vasileva Shilova (5; Bulgaria); Kiara Rumenova Krasteva (5; Bulgaria); Metin Murad Murad (5; Bulgaria); Milosevic Jovan (9; Serbia); Nika Dimitrova Atanasova (6; Bulgaria); Oleg Anufriiev (5; Ukraine); Pavel Ladislav Herout (4; Bulgaria); Rukhman Eliana (2; Uzbekistan); SAGYNBEK YESKENDIR (3; Kazakhstan); Sava Deyanov Troanski (4; Bulgaria); Selena Emilova Buhova (7; Bulgaria); SOLOJAN DINU-ANDREI (6; Romania); Trajkovic Marko (11; Serbia); UTEMURATOV ALLAYAR (4; Kazakhstan); Victor Anchev Petrov (5; Bulgaria); Vladimir Valeriev Sabev (1; Bulgaria); Vujadinovic Una (8; Serbia)

СРЕБЪРНИ МЕДАЛИСТИ

Alexander Stoyanov Pramatarov (6, Bulgaria); Andric Vojislav (11, Serbia); Dea Chavdarova Petrova (3, Bulgaria); Deyan Todorov Tasev (12, Bulgaria); Georgi Plamenov Dimitrov (3, Bulgaria); Georgi Veselinov Georgiev (7, Bulgaria); GRIGORE ALEXANDRU IOAN (4, Romania); Ivanimira Krasimirova Nedelcheva (9, Bulgaria); Liliya Neycheva Damgalieva (6, Bulgaria); Maya Vladimirova Miloykova (7, Bulgaria); Mihailovic Jovan (11, Serbia); Radoslav Svetoslavov Balkanski (10, Bulgaria); Radost Ancheva Petrova (1, Bulgaria); SAVIN TEODOR LUCA (6, Romania); Teodor Nevenov Neykov (6, Bulgaria); Teodora Dimitrova Radeva (1, Bulgaria); Teodora Mihaylova Goncheva (7, Bulgaria); Valentin Nikolaev Stanchev (8, Bulgaria); Velislav Teodorov Dzhelepov (10, Bulgaria); ZHUMATAY IMANALI (1, Kazakhstan); Zolnikova Kseniia (2, Uzbekistan)

БРОНЗОВИ МЕДАЛИСТИ

Alexandru Matei Hanu (2, Romania); Alexsandar Danchev (11, Bulgaria); Ali Kakhan Khalbylbekov (2, Kazakhstan); Bijeljic Rajko (12, Serbia); Denislav Ganev (3, Bulgaria); DRAGNEA MIHAI ALEXANDRU (6, Romania); Filip Dzhalev (6, Bulgaria); GABITOV JALEEL (8, Kazakhstan); Iskren Matev (2, Bulgaria); KHALILOV IMRAN DILSHODOVICH (2, Uzbekistan); Khoshimova Muborakkhon (8, Uzbekistan); Kristofer Torokoff (9, Estonia); Martin Manolov (5, Bulgaria); Mijailovic Ana (12, Serbia); MURAT SULTAN (8, Kazakhstan); MUTALOV BEKHRUZ BAKHTIYAROVICH (2, Uzbekistan); Nikol Dineva (5, Bulgaria); SAH ANISHA (3, Romania); Sander Kaal (12, Estonia); UMEROV EMIN RAMIZOVICH (2, Uzbekistan); Vanja Jelovac (9, Serbia); Zornitsa Dikova (7, Bulgaria); Холмирзаев Бехрус (4, Uzbekistan)

ПЕТИ ТУРНИР ПО РЕШАВАНЕ НА АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ И АРИТМЕТИЧНИ РЕБУСИ LODOVICO FERRARI
LODOVICO FERRARI TOURNAMENT FOR SOLVING ALGEBRAIC EQUATIONS AND ARITHMETIC PUZZLES

На 29 юни 2025 г. от 13:00 ч. в СУ „Любен Каравелов“, гр. Несебър, в рамките на турнира „Математика без граници“ ще се проведе финалът на турнира по решаване на аритметични ребуси и алгебрични уравнения „Lodovico Ferrari“.

РЕГЛАМЕНТ НА ТУРНИРА 2025 г.

Турнирът „Лодовико Ферари“ е състезание по решаване на аритметични ребуси и алгебрични уравнения за ученици на възраст от 7 до 19 години.

1. Етапи: Турнирът се провежда в два етапа: квалификация и финално състезание

2. Участници: ученици от 1 до 12 клас.

3. Квалификация: Провежда в следните срокове

До 30 март на електронен адрес се изпраща попълнена заявка за участие mwb_bg@mathematicalmail.com Заявката е публикувана на www.mathematicalmail.com

На 31 март организаторите изпращат на участниците условията на задачите за квалификацията

До 30 април на електронен адрес или с писмо на адрес Стара Загора, 6000, пощенска кутия 288, математически турнир Ферари, участниците изпращат решенията на задачите за своя клас.

Класирането се обявява на електронната страница **www.mathematicalmail.com**

4. Формат на състезанието:

4.1. Задачи

5 задачи със свободен отговор и 2 задачи за записване на решението

4.2. Състезателни групи

Състезателните групи за решаване на аритметични ребуси са: 1-2 клас; 3 - 4 клас; 5-6 клас

Състезателните групи за решаване на алгебрични уравнения: 7-8 клас, 9 - 10 клас; 11 - 12 клас

4.3. Време за работа: не повече от 60 минути.

4.3. Оценяване

4.3.1. На задачите, за които се посочва само отговора

Всяка задача от 1-ва до 5-та се оценява с 2 точки за верен отговор; с 1 точка – ако отговорите са два или повече, а са посочени поне половината, или ако освен верният отговор, е посочен и един грешен; 0 точки – за грешен отговор или липса на отговор.

4.3.2. На задачите, за които се представят решение

Задачи, за които се представят решение

6-та и 7-ма задача се оценява с 4 точки за решение, което има и обосновка и верен отговор; с 2 точки за решение, което няма обосновка, но има верен отговор, 1 точка – при представено вярно частично решение

5. Награди:

Победителите в класирането за всеки от класовете 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 клас получават купи за и сертификат.

Класираните на второ и трето място получават сертификат и медал за съответното място.

Всички участници получават сертификати.

При равен брой точки наградата се подeля**.**

6. Финансиране:

6.1. В квалификацията се заплаща такса от 30 лева. Срок за изпращане на таксата: 30 март

Таксата се заплаща по банкова сметка на фондация „**Математика без граници“ BG82FINV91501017184688, Първа инвестиционна банка,** Основание за превод: име на дете, квалификация Ребуси и Уравнения

6.2. Класираните за финала заплащат такса от **40 лева/ 20 евро.** Срок за заплащане – 10 юни

Таксата се заплаща по банкова сметка на фондация „Математика без граници“ **BG82FINV91501017184688, Първа инвестиционна банка.** Основание за превод: име на дете, финал Ребуси и Уравнения

6.3. Организацията по пътуването и пребиваването на участниците в Несебър по време на финала се организира от участниците/родителите/ училищата и е се финансира от родителите/училищата.

ЗАДАЧИТЕ ОТ ПЪРВИТЕ ЧЕТИРИ ТУРНИРА 2021, 2022, 2023 И 2024

Задачи за 7. клас – квалификация 2021

1. Решете уравнението

$$5+5:((5+5.(x-5)):5-5)-5=5.$$

2. Колко са решенията на уравнението

$$(x-2)(x^2-4x+3)=(2x-5)(x^2-5x+6)?$$

3. Решете уравнението

$$\underbrace{(x-(x-(x-\cdots-(}_{2021}x-1)))\dots)=1.$$

4. Намерете най-малкото число x, за което

$$x=a+b+c=d+e+f,$$

ако a, b, c, d, e и f са различни помежду си естествени числа.

Задачи за 8 клас – квалификация 2021

1. Корените на квадратните уравнения $x^2-px+q=0$ и $x^2-qx+p=0$, са естествени числа. Определете възможните стойности на p и q.

2. Докажете, че уравнението

$$x^{10}-x^7+x^2-x+1=0$$

няма реални корени.

3. Решете уравнението

$$(x^2-9)^2-13x(x^2-9)+40x^2=0$$

4. Решете системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}(x+y)(x+z)=15\\(y+z)(y+x)=18\\(z+x)(z+y)=30\end{array}\right.$$

Задачи за 9 клас – квалификация 2021

1. Квадратния тричлен $f(x)=ax^2+bx+c=0$ е такъв, че уравнението $f(x)=x$ няма реални корени. Докажете, че уравнението $f(f(x))=x$ също няма реални корени.

2. Нека $P(x) = x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ е полином с рационални коефициенти. Докажете, че ако $P(x)$ има единствен реален корен ξ, тогава ξ е рационално число.

3. Намерете броят на реалните решения на уравнението

$$(x^{2022}+1).(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2018}+x^{2020})=2022.x^{2021}.$$

4. Решете системата уравнения

$$\left|\begin{array}{c}x+y^2=2\\x+y+z^2=15\\x+y+x^2=-10\end{array}\right. .$$

Задачи за 10 – 12 клас – квалификация 2021

1. Докажете, че уравнението
$$x^{10} - x^7 + x^2 - x + 1 = 0$$
няма реални корени.

2. На лист тетрадка е написано едно уравнение от единадесета степен. Върху него капнала капка мастило и останали да се четат само първите три члена:
$$x^{11} + 6x^{10} + 5x^9 + \cdots = 0\,.$$
Намерете корените на това уравнение, ако е известно, че те образуват аритметична прогресия.

3. Коя е най-малката стойност на $a^2 + b^2$, където a и b са произволни числа, за които уравнението
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$
има поне един реален корен?

4. Ако
$$\left| \begin{aligned} b &= \frac{8a^2}{a^2+9} \\ c &= \frac{10b^2}{b^2+16}, \\ a &= \frac{6c^2}{c^2+25} \end{aligned} \right.$$
пресметнете $a + b + c$.

Задачи за 7. клас – финал 2021, 7 август 2021 г.

1. Решете уравнението
$$x^{12} - x^8 - x^4 + 1 = 0.$$

2. Уравненията $5x^2 + 2ax + 3a = 0$ и $5x^2 + 3ax + 2a = 0$ имат общ реален корен. Намерете стойностите на параметъра a .

3. Решете уравнението:
$$\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} + \frac{x-3}{2019} + \frac{x-4}{2018} = \frac{x-2021}{1} + \frac{x-2020}{2} + \frac{x-2019}{3} + \frac{x-2018}{4}$$

4. Да се докаже, че можем да изберем такива пет различни реални числа a_1 , a_2 , a_3 , a_4, a_5 , че уравнението
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)(x+a_5)$$
да има точно 3 различни решения.

Задачи за 8. клас – финал 2021, 7 август 2021 г.

1. Решете уравнението $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$

2. Колко са реалните корени на уравнението $x^{2021} + x^{21} = 2x^{2022}$?

3. Докажеге, че можем да изберем такива шест различни реални числа a_1 , a_2 , a_3 , a_4, a_5 , a_6 , че уравнението

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6) == (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)(x+a_5)(x+a_5)$$

да има точно 3 различни решения.

4. Нека *n* е естествено число. За кои стойности на *n* уравнението

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 2 = 0$$

има два реални корена?

Задачи за 9. клас – финал 2021, 7 август 2021 г.

1. Решете уравнението $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$.

2. Колко реални корена има уравнението $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$?

3. Решете уравнението $(3x+4)(3x+2)(3x-1)(1-x) = 4x(3x+1)$.

4. Докажете, че уравнението $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 27 = 0$.
няма реални решения.

Задачи за 10.-11. клас – финал 2021, 7 август 2021 г.

1. Решете уравнението $x^4 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$, ако един от корените му е $\sqrt{2} - 1$.

2. Докажете, че уравнението $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1 = 0$.
има за трикратен корен числото 1, ако *n* естественото число $n > 1$.

3. Решете уравнението $(x^2 - x - 1)^3 + (x^2 - 3x + 2)^3 = (2x^2 - 4x + 1)^3$.

4. Докажете, че уравнението $30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 = 0$ няма реални решения.

ВТОРИ ТУРНИР 2022
Квалификация – 2022 г.

Задача 1. Кои са реалните корени на уравнението $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297$?

Задача 2. Кои са реалните корени на уравнението $(x+2)^4 + x^4 = 82$?

Задача 4. Уравнението $x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = 0$,
където a е реален параметър, има за корен $C.a$. Колко е константата *C*?

Задача 5. Колко са реалните корени на уравнението $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0$?

Задача 6. Решете уравнението $x^3 + 6x - 2 = 0$.

Задача 7. Решете уравнението $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$.

Финал – 4 юли 2022 г.

Задача 1. Колко са реалните корени на уравнението $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = 0$?

Задача 2. Кои са реалните корени на уравнението $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0$?

Задача 3. Кои са ирационалните корени на уравнението $x^2 - 6[x] + 5 = 0$?

Задача 4. Уравнението $x^3 - 2ax^2 - (a^2 + 1)x - 2a + 2 = 0$, където a е реален параметър, има за корен $C.(a - 1)$. Колко е константата C? Кои са реалните корени на уравнението?

Задача 5. Колко са реалните корени на уравнението $20x^{20} + 22x^{21} = 2021x^{2022}$?

Задача 6. Намерете реалните корени на уравнението $x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0$.

Задача 7. Намерете реалните корени на уравнението $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 20x - 5 = 0$.

8. – 9. клас - квалификация 2023 г.

В задачите се имат предвид само реални числа

1. Сред петте цели числа x , 2, 3, 4 и (- 5) са коефициентите на квадратен тричлен и неговите корени. Кое е числото x?

2. Намерете сборът от реалните корени на уравненията

$$\underbrace{x^2 + 20\,x + 2023 = 0, x^2 + 22\,x + 2023 = 0, \dots, x^2 + 96\,x + 2023 = 0, x^2 + 98\,x + 2023 = 0}_{\text{40 квадратни уравнения}}$$

3. Докажете, че за всеки три реални стойности на параметрите a, b и c корените на уравнението $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ са реални.

4. Решете в цели числа уравнението $20x + 23y = 2023$.

Задачи за 10.- 12. клас – квалификация 2023 г.

1. Решете уравнението $[x^2] = 3[x]$.

2. Решете уравнението $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.

3. Решете системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0 \end{array}\right..$$

4. Докажете, че ако a и b са два от корените на уравнението $x^4 + x^3 - 1 = 0$, то ab е корен на уравнението $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

8. – 9. клас – финал 2 юли 2023 г.

1. Намерете реалните числа *x*, за които $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$.

2. Намерете реалните решения на уравнението
$$x^5 + (x-1)^5 + (x-2)^5 + (x-3)^5 + (x-4)^5 = 0$$

3. Намерете реалните числа *x*, за които $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$.

4. Решете в естествени числа уравнението
$$\frac{xyz + y + 1}{yz + 1} = \frac{10}{7}$$

5. Намерете реалните решения на уравнението $(x-7)(x-5)(x+4)(x+2) = -81$.

6. Намерете реалните решения на уравнението $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$.

10. – 12. клас – финал 2 юли 2023 г.

1. Намерете реалните числа *x*, за които $x - \big|x - |x+1|\big| = \sqrt{5 - \big|2 - |6-x|\big|}$.

2. Колко е остатъкът при делението на $3x^{100} + 2$ на $(x+1)^{2}$?

3. Намерете реалните числа *x*, за които $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

4. Намерете всички реални решения (x, y, z) на системата уравнения
$$\left|\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2(y+z) &= xyz + 14 \\ y^3 + z^3 + y^2(z+x) &= xyz - 21 \\ z^3 + x^3 + z^2(x+y) &= xyz + 7 \end{aligned}\right.$$

5. Решете в естествени числа *x*, *y* и z уравнението $55(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 229(xy^3 + 1)$.

6. Нека F(x) е полином от 2024 степен с реални коефициенти и $F(x) = F(-x)$. Колко различни реални корени може да има уравнението $F(x) = 0$?

8. – 9. клас – квалификация 2024 г.

1. Кои са рационалните корени на уравнението $2x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 3 = 0$?

2. Колко са отрицателните корени на уравнението $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$?

3. Решете уравнението $\frac{x^4}{(x-2)^2} = x^2 + 4x - 4$.

4. Решете уравнението $(x^2 + x + 1)^2 - 13x^2(x^2 + x + 1) + 40x^4 = 0$.
5. Определете тези стойности на параметъра *a*, за които системата уравнения има едно решение.
$$\left|\begin{aligned} y &= ax^2 + |x| + a - 2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

6. Проверете дали $\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$ е корен на уравнението
$$3x^7 - 2x^6 - 10x^5 + 13x^4 - 7x^2 + 28x - 10 = 0?$$

10. – 12. клас – квалификация 2024 г.

1. Find the sum of the series:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2024^3$$

2. Let $a, b, c \in R^+$ and be such that $a + b + c = 1$. Find all such numbers a, b, c for which we have:

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{9}$$

3. We have the following non zero real numbers a, b, c, s.t. $a + b + c = 0$. What is the sum:

$$a(\frac{3}{b} + \frac{3}{c}) + b(\frac{3}{c} + \frac{3}{a}) + c(\frac{3}{a} + \frac{3}{b})$$

4. For what value of a is the following equation correct:

$$\sqrt{2a\sqrt{4a\sqrt{8a\sqrt{16a \ldots \sqrt{1024a}}}}} = 2024$$

5. Find all $a, b, c, d \in R^+$ s.t.

$$[(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)]^3 \geq 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4$$

7. Let $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a, b, c, d are all real numbers. Prove that if $f(x)$ has three distinct real roots, then $f(f(x))$ has at least one real root.

8. – 9. клас – финал 30 юни 2024 г.

1. Решете уравнението

$$1 - 1:\big(1 + 1:(1 + 1:x)\big) = \frac{2024}{2025}$$

2. За кои стойности на параметъра a уравненията $a^3x - 1023 = 1022$ и $1022x = a - 1023x$ имат общ корен?

3. Представете многочлена $x^2(x^2 + 2) - (x - 2)(x - 4)$ като произведение от два многочлена от втора степен.

4. Решете в прости числа p, q и r уравнението $pqr = 13(p - q + r)$.

5. Решете уравнението $x^3 - 3\sqrt{216}\,x + \sqrt{216}.\big(\sqrt{8} + \sqrt{27}\big) = 0$.

6. Колко са отрицателните корени на уравнението? Обосновете отговора си!

$$x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x + 4 = 0$$

10 – 12 клас (born in 2007 - 2005)- – финал 30 юни 2024 г.

1. For the real numbers x, y, and z solve the system of equations:

$$(x - y)^2 + z = 3$$
$$(y - z)^2 + x = 1$$
$$(z - x)^2 + y = 3$$

2. We have a cubic equation with roots x_1, x_2, x_3. Let p be a prime number. The following is true:

1. ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = \frac{p^3-1}{2}$
2. x_1 is the geometric average of x_2 and x_3
3. $x_1x_2x_3 = \sqrt{p^3}$

Find the values of x_1, x_2, and x_3.
3. Find the sum of the complex numbers of the equation: $2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3 = 0$
4. Solve the following system of equation in whole numbers:

$$(x-y)(x+y) = z^2 + 1$$
$$z - x = 7 - y$$

Find all pairs (k, x) such that k is a whole nonnegative number and the difference $(x - k)$ is a perfect cube.
5. You're given a quadratic equation with two real roots. The first root is a two-digit number. The second root is equal to the difference of the two digits of the first root. Now, imagine we are creating a new quadratic equation, where the first root is the original equation's first root but the digits are switched. The second root of this new equation is, again, equal to the difference of the two digits of the first root. If we added up the free terms of those two quadratic equations, we'd get 36. Moreover, if we added up the digits of the two-digit number from the first (original) equation, raised to the third power, we'd get 152. Find the original equation's roots.
6. Find all the solutions of the following system of equations:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$2xy + y^2 - x^2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Find all pairs (k, x) such that k is a whole nonnegative number and the difference $(x - k)$ is a perfect cube.

ЗАДАЧИ ЗА КВАЛИФИКАЦИОННИЯ КРЪГ НА ТУРНИРА ПО РЕШАВАНЕ НА АРИТМЕТИЧНИ РЕБУСИ 2024 г.

Задачи за 1, 2, 3 и 4 клас – квалификация 2024 г.

На еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви съответстват различни цифри

1. Заменете звездичките (⋆) с различни цифри, така че

$$\star + \star + \star + \star + \star + \star + \star + \star = \star\star$$

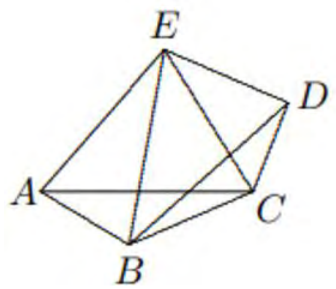
2. Пресметнете
Р + А + В + Н + И + Н + А, ако У – Р = А:В = Н.Е = Н + И = Е

3. Ако **С + О + Л = 6**, колко най-много може да е **ЛА + СИ?**

4. Пресметнете М + О + Р + Е, ако ММММ + ООО + РР + Е = 2024

5. Пресметнете ФА + ЛА, ако ФА . ЛА = СОЛ

6. Без да вдигаме молива от листа и без да повтаряме отсечки трябва да начертаем 9-те отсечки *AB, AC, AE, BE, BC, BD, CE* и *CD.*



Как? Отговорът запишете като записвате буквите на точките, през които минавате.

Задачи за 5, 6 и 7 клас – квалификация 2024 г.

На еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви съответстват различни цифри

1. Колко е СЕДЕМ, ако ДВЕ + ДВЕ + ДВЕ + ДВЕ = ОСЕМ?

2. Колко е СЕДЕМ, ако ДВЕ . ТРИ = ШЕСТ?

3. Колко е НЕБЕ, ако У – Р = А:В = Н.Е = Н + И = Е?

4. В едно стадо има **К** овце. Колко са овцете в стадото, ако СТАДО = К. ОВЦЕ?

5. Поставете вместо звездичките цифри, така че

$$\star,\star.\star,\star.\star,\star = \star$$

Отбелязваме че $5^3 = 125$ е трицифрено, тогава в представянето на нито едно от числата

6. Колко са числата УЧЕНИЕ, ако ЧЕТЕНЕ + ПИСАНЕ = УЧЕНИЕ?

Задачи за 1. – 4. клас – финал 30 юни 2024 г.

На еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри.

1. Пресметнете сбора на различните едноцифрени числа A и B, ако

$$A \neq 0 \text{ и } \overline{AA} - B = 2 .$$

2. Пресметнете сбора на двуцифрените числа $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$, ако разликата им е равна на едноцифреното число A.

$$\overline{AB} - \overline{BA} = A \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BA} = ?$$

На еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри.

3. Колко са решенията на ребуса $A.B = A + B - 1$?

4. Събрах числата $\overline{NE}, \overline{SS}, E, B, \overline{AR}$ и получих 70. Пресметнете

N + E + S + S + E + B + A + R

На еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри.

5. Вместо звездичките поставете 10-те цифри, така че $** \times *** = *****$.

Кое е двуцифреното число?

6. В числото равенство някои цифри заменили някой цифри с букви, като различните цифри заменили с различни букви, еднаквите цифри –с еднакви букви.
Получило се следното $\overline{2024X} = \overline{YY} \times \overline{SEA}$. Пресметнете числото $\overline{SEA}$.

Задачи за 5, 6 и 7 клас – финал 30 юни 2024 г.

На еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри.

1. Пресметнете най-голямото четирицифрено число $\overline{REBUS}$, ако

$$R + E < B.B < U:S$$

2. В числото равенство някои цифри заменили с букви като различните цифри заменили с различни букви, еднаквите цифри – еднакви букви. Получило се следното

$$\overline{A5} \times \overline{A5} + 2024 = \overline{7BCD}$$

Пресметнете числото

$$\frac{\overline{CD}}{A \times (B+1)}$$

3. Пресметнете $S^A \times E^{-A}$, ако $E, A \times E, A = SE, A$**.**

Пояснение: E, A; E, A; E, A са десетични дроби; $x, yz = \frac{\overline{xyz}}{100}$

4. Коя е най-малката стойност на трицифреното число $\overline{ACB}$, ако трицифреното число $\overline{ACB}$ е средно аритметично на трицифрените числа $\overline{ABC}$ и $\overline{BAC}$?

5. Пипи написа на дъската пример и го зашифрова по правилата на буквените ребуси така**:** $S - E - A = S:E:A$ като на еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а различните - различни. Намерете всички възможни стойности на $S \times E \times A$.

6. Пресметнете $B + L + A + C + K + \overline{SEA}$, ако $\overline{BL} + \overline{AC} + K = 188$ и $S \times \overline{EA} = 96$

ОТГОВОРИ И КРАТКИ РЕШЕНИЯ

Задачи за 7. клас – квалификация 2021

1. **Решение:** $(5-5)+5:((5+5.(x-5)):5-5)=5 \Leftrightarrow 5:((5+5.(x-5)):5-5)=5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(5+5.(x-5)\big):5-5=1 \Leftrightarrow \big(5+5.(x-5)\big):5=6 \Leftrightarrow 5+5.(x-5)=30 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5.(x-5)=25 \Leftrightarrow x-5=5 \Leftrightarrow x=10$

2. Решение: $(x-2)(x^2-4x+3)=(2x-5)(x^2-5x+6) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-1)=(2x-5)(x-2)(x-3) \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(-x+4)=0$
$\Rightarrow$корени са 2, 3 и 4.

3. Решение:

$$x-(x-1)=1;$$
$$x-\big(x-(x-1)\big)=x-1;$$
$$x-\Big(x-\big(x-(x-1)\big)\Big)=1,\ldots,$$
$$\underbrace{(x-(x-(x-\cdots-(}_{2021}x-1)))\ldots)=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$$

4. Решение: Като съберем почленно двете равенства, получаваме
$$2x=a+b+c+d+e+f \geq 1+2+3+4+5+6=21 \Rightarrow x \geq 11$$
Числото 11 може да се реализира по следния начин: 11 = 1 + 3 + 7 = 2 + 4 + 5. Отговор: 11.

Задачи за 8 клас – квалификация 2021

1. (*олимпиада в Югославия, 1971 г.)* **Решение:** Нека x_1 и x_2 са естествени числа и са корени на уравнението $x^2-px+q=0, x_3$ и x_4 са естествени числа и са корени на уравнението $x^2-qx+p=0$. Тогава
$$(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=q-p+1$$
$$(x_3-1)(x_4-1)=x_3x_4-(x_3+x_4)+1=p-q+1$$
$\Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1)=2.$

Ако един от корените е 1, тогава корените на другото уравнение са 3 и 2.

Нека 1 е корен на $x^2-qx+p=0$. Тогава 2 и 3 са корени на $x^2-px+q=0$. От формулите на Виет $p=2+3=5, q=2.3=6$.

Остава да проверим дали 1 е корен на $x^2-qx+p=0$, ако $p=5, q=6$. Числото 1 е корен на уравнението $x^2-6x+5=0$.

По същия начин получаваме, че **ако 1 е корен на уравнението** $x^2-px+q=0$, тогава 2 и 3 са корени на $x^2-qx+p=0$, получаваме, че $p=6, q=5$. Числото 1 е корен на $x^2-px+q=0$, ако $p=6, q=5$, защото го удовлетворява.

Нека всички корени са по-големи от 1. Тогава
$(x_1-1)(x_2-1) \geq 1$ и $(x_3-1)(x_4-1) \geq 1 \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1) \geq 2.$
Но по-горе получихме, че $(x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1)=2$.
Равенство се постига единствено , ако и четирите корена са равни на 2, което означава че $p=q=2$.

Отговор: Възможните стойности на p и q са $p=6, q=5$; $p=5, q=6$; $p=q=2$.

2. Решение:

$$f(x)=x^{10}-x^7+x^2-x+1=\begin{cases} x^7(x^3-1)+x(x-1)+1=x(x-1)(x^6(x^2+x+1)+1)+1 \\ x^{10}+x^2(1-x^5)+(1-x) \end{cases}$$

От
$f(x)=x(x-1)(x^6(x^2+x+1)+1)+1>0$ за $x \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$
и $f(x)=x^{10}+x^2(1-x^5)+(1-x)>0$ за $x \in (0;1)$
следва, че уравнението $x^{10}-x^7+x^2-x+1=0$ няма реални корени.

3. Решение:

$$(x^2-9)^2-13x(x^2-9)+40x^2=0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y^2-13xy+40x^2=0 \Leftrightarrow (y-5x)(y-8x) \\ y=x^2-9 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9=5x \\ x^2-9=8x \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{5\pm\sqrt{61}}{2} \\ x=9 \\ x=-1 \end{array} \right.$$

4. Решение: След умножаване на уравненията, получаваме

$\left((x+y)(y+z)(z+x)\right)^2 = 15\times 18\times 30 \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = \pm 90.$

Ако $(x+y)(y+z)(z+x)=90 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y+z=6 \\ z+x=5 \\ x+y=3 \end{array}\right. \Rightarrow x+y+z=7 \Rightarrow x=1, y=2, z=4$

Ако $(x+y)(y+z)(z+x)=-90 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y+z=-6 \\ z+x=-5 \\ x+y=-3 \end{array}\right. \Rightarrow x+y+z=-7 \Rightarrow x=-1, y=-2, z=-4$

Отговор: $(1, 2, 4)$ и $(-1, -2, -4)$.

Задачи за 9 клас – квалификация 2021

1. Решение: От това, че уравнението $f(x)=x$ няма реални корени, то или

$f(x)>x,$ за всяко x (ако $a>0$)

$f(x)<x,$ за всяко x (ако $a<0$).

Но тогава

или $f\big(f(x)\big)>f(x)>x$ или $f\big(f(x)\big)<f(x)<x$.

Тогава уравнението $f(f(x))=x$ също няма корени.

2. Решение:

Алгебричното уравнение е от 4-та степен, тогава ξ е или двукратен, или четирикратен корен. Нека ξ е четирикратен корен.

От $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x-\xi)^4=x^4-4\xi x^4+6\xi^2x^2-4\xi^3x+\xi^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi=-\frac{1}{4}a_1\in\mathbb{Q}$$

Нека ξ е двукратен корен.

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \xRightarrow{x=y-\frac{a_1}{4}}$$

$$\left(y-\frac{a_1}{4}\right)^4+a_1\left(y-\frac{a_1}{4}\right)^3+a_2\left(y-\frac{a_1}{4}\right)^2+a_3\left(y-\frac{a_1}{3}\right)+a_4=0$$

$$\Rightarrow y^4-\left(\frac{8a_2-3{a_1}^2}{8}\right)y^2+\left(\frac{8a_3-4a_1a_2+{a_1}^3}{8}\right)y+a_4=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow y^4+Py^2+Qy+R=0,$$

където $P,Q,R\in\mathbb{Q}$.

Нека единственият корен, който е двукратен е $\alpha=\xi+\frac{1}{4}a_1$, а другите два корена са комплексно спрегнати числа:

$$p+qi \text{ и } p-qi$$

$$y^4+Py^2+Qy+R=(y-\alpha)^2(y-p-qi)(y-p+qi)$$

$$y^4+Py^2+Qy+R=$$

$$=y^4+(-2\alpha-2p)y^3+(\alpha^2+4p\alpha+p^2+q^2)y^2+(-2p\alpha^2-2\alpha p^2-2\alpha q^2)y+\alpha^2(p^2+q^2)$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} -2\alpha-2p=0 \\ \alpha^2+4p\alpha+p^2+q^2=P \\ -2p\alpha^2-2\alpha p^2-2\alpha q^2=Q \\ \alpha^2(p^2+q^2)=R \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} p=-\alpha \\ q^2=P+2\alpha^2 \\ 2\alpha q^2=-Q \\ \alpha^2(\alpha^2+q^2)=R \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2\alpha(P+2\alpha^2)=-Q \\ \alpha^2(\alpha^2+P+2\alpha^2)=R \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} 4\alpha^3+2\alpha P+Q=0 \\ 3\alpha^4+P\alpha^2-R=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 4\alpha^3+2\alpha P+Q=0 \\ 2P\alpha^2+3Q\alpha+4R=0 \end{array}\right.$$

$$2P\alpha^2+3Q\alpha+4R=0 \Leftrightarrow 2P\alpha^2=-3Q\alpha-4R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \Rightarrow 3Q\alpha=-4R \Rightarrow \begin{cases} Q=0 \Rightarrow y^4+R=0 \Rightarrow \alpha=0\in\mathbb{Q} \\ Q\neq 0 \Rightarrow \alpha=-\dfrac{4R}{3Q}\in\mathbb{Q} \end{cases} \\ P\neq 0 \Rightarrow \alpha^2=\dfrac{-3Q\alpha-4R}{2P} \Rightarrow \alpha^3=\dfrac{(9Q^2-8RP)\alpha+12QR}{4P^2} \end{cases}$$

От

$$4\alpha^3+2\alpha P+Q=0 \text{ и}$$

$$\alpha^3=\frac{(9Q^2-8RP)\alpha+12QR}{4P^2} \Rightarrow \frac{(9Q^2-8RP)\alpha+12QR}{P^2}+2\alpha P+Q=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (9Q^2-8RP)\alpha+12QR+2\alpha P^3+QP^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (9Q^2-8RP+2P^3)\alpha+12QR+QP^2=0$$

Да изследваме уравнението:

$$(9Q^2-8RP+2P^3)\alpha+12QR+QP^2=0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} E.\alpha=F \\ E=9Q^2-8RP+2P^3\in\mathbb{Q} \\ F=-12QR-QP^2\in\mathbb{Q} \end{array} \right.$$

$Q\neq 0,$ защото тогава уравнението е биквадратно и освен α и $(-\alpha)$ е корен.

От $\alpha^2(p^2+q^2)=R \Rightarrow R>0 \Rightarrow 12R+P^2>0.$

Тогава от $Q\neq 0$ и $12R+P^2>0 \Rightarrow \boldsymbol{F}=-(12QR+QP^2)=-Q(12R+P^2)\neq 0$

Тогава уравнението

$$\left| \begin{array}{c} E.\alpha=F \\ E\in\mathbb{Q} \\ F\neq 0\in\mathbb{Q} \end{array} \right.$$

няма за решение ирационално число $\Rightarrow \alpha\in\mathbb{Q} \Rightarrow \xi=\alpha-\frac{1}{4}a_1\in\mathbb{Q}.$

Коментар: Пресмятанията биха се облекчили, ако използваме, че ако α е двукратен корен на $y^4+Py^2+Qy+R=0$, тогава е корен и на $(y^4+Py^2+Qy+R)'=0,$ но не е корен на $(y^4+Py^2+Qy+R)''=0$ и $(y^4+Py^2+Qy+R)'''=0.$

Получаваме

$$\left| \begin{array}{c} \alpha^4+P\alpha^2+Q\alpha+R=0 \\ 4\alpha^3+2P\alpha+Q=0 \\ 12\alpha^2+2P\neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{c} \alpha^4+P\alpha^2+Q\alpha+R=0 \\ 4\alpha^3+2P\alpha+Q=0 \\ 12\alpha^2+2P\neq 0 \\ 24\alpha^2\neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \alpha^4+P\alpha^2+Q\alpha+R=0 \\ 4\alpha^4+2P\alpha^2+Q\alpha=0 \\ 12\alpha^2+2P\neq 0 \\ 24\alpha^2\neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 2P\alpha^2+3Q\alpha+4R=0 \\ 4\alpha^3+2P\alpha+Q=0 \\ 12\alpha^2+2P\neq 0 \\ 24\alpha^2\neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \ldots.$$

3. Решение: Числото 0 не е корен на уравнението

Тогава $x\neq 0$ и

$(x^{2022}+1).x^{2021} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x^{2021}}\right)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2018}+x^{2020})=2022 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+x^3+x^5+\cdots+x^{2019}+x^{2021}+\frac{1}{x^{2021}}+\frac{1}{x^{2019}}+\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}=2022 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\boldsymbol{x}+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\cdots+\left(x^{2019}+\frac{1}{x^{2019}}\right)+\left(x^{2021}+\frac{1}{x^{2021}}\right)=2022.$$

Ако $x>0 \Rightarrow$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\cdots+\left(x^{2019}+\frac{1}{x^{2019}}\right)+\left(x^{2021}+\frac{1}{x^{2021}}\right)\geq \underbrace{2+2+\cdots+2}_{1011}=2022$$

Равенство се постига, когато $x=1.$

Ако $x<0 \Rightarrow (x^{2022}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2018}+x^{2020})>0>2022.x^{2021}$

Отговор: Числото 1 е единствения реален корен на уравнението.

4. Решение: Умножаваме третото уравнение с 4 и събираме полученото уравнение с другите две. Получаваме:

$$6x+5y+4z+4x^2+z^2+y^2=-23 \Leftrightarrow \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z+2)^2=-\frac{21}{2}.$$

Полученото уравнение няма решение. Няма решение и системата уравнения.

Задачи за 10 – 12 клас – квалификация 2021

1. Решение: Вижте решението на задача 2 за 9 клас.

2. Решение: Нека корените на уравнението са

$$x_1=a-5d, x_2=a-4d, \dots, x_{10}=a+4d, x_{11}=a+5d,$$

Сборът на корените представяме и чрез формулите на Виет, и като съберем корените.Получаваме: $x_1+\ x_2+\ \ x_3+\ x_4+\ \ x_5+\ \ x_6=\begin{cases}11a\\-6\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{6}{11}$

$$x_1^2+\dots+x_6^2=\begin{cases}(a-5d)^2+\dots+(a+5d)^2=11a^2+110d^2\\=(x_1+\cdots)^2-2(x_1x_2+\cdots)=36-10=26\end{cases}\Rightarrow d^2=\frac{25}{121}\Rightarrow d=\pm\frac{5}{11}$$

3. Решение: $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0 \overset{y=x+\frac{1}{x}}{\Longleftrightarrow} (y^2-2)+ay+b=0 \Leftrightarrow y^2+ay+b-2=0 \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8-4b}}{2}$$

$$|y|=\left|\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8-4b}}{2}\right|\geq 2 \Rightarrow |a|+\sqrt{a^2+8-4b}\ \geq 4 \Rightarrow 2|a|-b\geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\geq a^2+(2-2|a|)=5\left(|a|-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5} \Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{4}{5}$$

$$a^2+b^2=\frac{4}{5} \Rightarrow a=\frac{4}{5}, b=-\frac{2}{5}$$

Уравнението е $x^4+\frac{4}{5}x^3-\frac{2}{5}x^2+ax+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2\left(x^2-\frac{6}{5}x+1\right)=0$ и има поне един реален корен.

4. Решение: Отбелязваме, че $a=b=c=0$ удовлетворяват системата уравнения. Нека $abc\neq 0$. Тогава $a>0, b>0$ и $c>0$.

От

$$\frac{a^2+9}{2}\geq\sqrt{9a^2} \Rightarrow \frac{a^2+9}{2}\geq 3|a| \overset{a>0}{\Longrightarrow} \frac{a^2+9}{2}\geq 3a \Rightarrow \frac{6a}{a^2+9}\leq 1 \Rightarrow \frac{8}{6}a.\frac{6a}{a^2+9}\leq\frac{8}{6}a$$

$$\Rightarrow b\leq\frac{4}{3}a;$$

$$\frac{b^2+16}{2}\geq\sqrt{16b^2} \Rightarrow \frac{b^2+16}{2}\geq 4|b| \overset{b>0}{\Longrightarrow} \frac{b^2+16}{2}\geq 4b \Rightarrow \frac{8b}{b^2+16}\leq 1 \Rightarrow \frac{10}{8}b.\frac{8b}{b^2+16}\leq\frac{10}{8}b$$

$$\Rightarrow c\leq\frac{5}{4}b;$$

$$\frac{c^2+25}{2}\geq\sqrt{25c^2} \Rightarrow \frac{c^2+25}{2}\geq 5|c| \overset{c>0}{\Longrightarrow} \frac{c^2+25}{2}\geq 5c \Rightarrow \frac{10c}{c^2+25}\leq 1 \Rightarrow \frac{6}{10}c\times\frac{10c}{c^2+25}\leq\frac{6}{10}c$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}\leq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{c};$$

От $b\leq\frac{4}{3}a$; $c\leq\frac{5}{4}b$ и $\boldsymbol{a}\leq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{c} \Rightarrow\ b\leq\frac{4}{3}a\leq\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{c}\leq b$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}a=b=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{c}.$$

От $b=\frac{8a^2}{a^2+9}\ \Rightarrow\frac{4}{3}a=\frac{8a^2}{a^2+9}\ \Rightarrow a=3, b=4, c=5$

$$\Rightarrow a+\ b+\ c=12.$$

Задачи за 7. клас – финал 2021

1. Решение: $x^{12}-x^8-x^4+1=0 \Leftrightarrow x^8(x^4-1)-(x^4-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^4-1)(x^8-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)(x^4+1)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$$

2. Отговор: $a=0, a=-1$. **Решение:**

$$(5x^2 + 2\,ax + 3a)-(5x^2 + 3ax + 2a)=0 \Leftrightarrow ax=a=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0\\ x=1 \Rightarrow a=-1\end{cases}$$

Ако α е общия корен, тогава α ще е корен и на уравнението

$$(5x^2+2ax+3a)-(5x^2+2ax+3a)=0 \Leftrightarrow\ ax=a$$

Ако $a=0$, тогава двете уравнения са $x^2=0$ и $x^2=0$. Те имат общ корен 0.

Ако $a\neq 0$, тогава общия корен е 1 и той ще удовлетворява двете уравнения. Получаваме, че $a=-1$.

3. Решение:

$$\left(\frac{x-1}{2021}-1\right)+\left(\frac{x-2}{2020}-1\right)+\left(\frac{x-3}{2019}-1\right)+\left(\frac{x-4}{2018}-1\right)=$$

$$=\left(\frac{x-2021}{1}-1\right)+\left(\frac{x-2020}{2}-1\right)+\left(\frac{x-3}{2019}-1\right)+\left(\frac{x-4}{2018}-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2022)\left(\frac{1}{2021}+\frac{1}{2020}+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2018}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=2022.$$

4. Решение: Ако $a_1=-3, a_2=-2, a_3=-1, a_4=0, a_5=1$, тогава уравнението е

$$(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)=(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)\big((x+3)(x+2)-(x-3)(x-2)\big)=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)=0.$$

Уравнението има три различни решения: 0, 1 и -1.

Задачи за 8. клас – финал 2021

1. Решение:

$$x^5-4x^4+5x^3-5x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow x^5-1-4x^4+4x+5x^3-5x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)-4(x-1)(x^3+x^2+x)+5x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4-3x^3+2x^2-3x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)((x^4+2x^2+1-3x(x^2+1))=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)(x^2-3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1\\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

2. Решение: Уравнението няма отрицателен корен, защото ако $x<0$ тогава $x^{2021}+x^{21}<0<2x^{2022}$. Числото 0 е корен на уравнението. Прилагаме теоремата на Декарт. Уравнението $-2x^{2022}+x^{2021}+x^{21}=0$ има само 1 положителен корен. Това е числото 1. **Отговор:** Уравнението има два реални корена 0 и 1.

3. Решение: $a_1=-4, a_2=-3, a_3=-2, a_4=-1, a_5=0, a_6=1$,

$$(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)=(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)\big((x+4)(x+3)(x+2)-(x-4)(x-3)(x-2)\big)=0$$

$\Leftrightarrow (18x^2+48)(x-1)x(x+1)=0 \Rightarrow 3$ три различни решения: 0, 1 и -1.

4. Решение: Не е трудно да се провери, че 1 не е корен, т.е. $x\neq 1$. Тогава от

$$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-2=x^n-\frac{x^n-x}{x-1}-2=\frac{x^{n+1}-2x^n+x-2}{x-1}=\frac{(x^n+1)(x-2)}{x-1}$$

Даденото уравнение е равносилно на $(x^n+1)(x-2)=0$.

Ако n е нечетно, тогава уравнението има един корен – числото 2.

Ако n е четно, тогава уравнението има два корена – числото 2 и (-1).

Задачи за 9. клас – финал 2021

1. Решение: Първи начин:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{1}{27}}} =$$

$$\Rightarrow x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x_2 = x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Solution (Jasen Plamenov Penchev, 9th grade, PMG "Akad. Ivan Gyuzelev" – Gabrovo**):**
Let $f(x) = x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Then $f'(x) = 3x^2 - 1$ from where $f'(x) = 0$ has roots $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. So the function $f(x)$ changes its direction (increasing – decreasing, or decreasing – increasing) at $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}: f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$, so $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ is a real root of $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$.

Now we have:

$0 = x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = x^3 + \frac{x^2}{\sqrt{3}} - \frac{x^2}{\sqrt{3}} - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\right)$.

$x^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} = 0 \implies x_{1,2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{3}{\sqrt{3}}}{2} \implies$

$$x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

So the roots of the given equation are $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ and $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Решение: Числото 0 не е корен на уравнението. Тогава търсим корен $x \neq 0$.
Уравнението има рационален корен 1.
Тогава $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + 3x + 1)$.
Уравнението $x^4 + x^3 + 3x + 1 = 0$ няма положителни корени.
Така установяваме, че уравнението $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ има един положителен корен.
Уравнението $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ няма отрицателни корени, защото уравнението $(-x)^5 + 2(-x)^3 - 3x^2 + (-x) - 1 = 0$, съгласно теоремата на Декарт, няма отрицателни корени.
Отговор: 1.

First solution (Jasen Plamenov Penchev, 9th grade, PMG "Akad. Ivan Gyuzelev" – Gabrovo**):**
Looking at $x = 1$ we find that it is a root of the given equation:
$1^5 + 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 - 1 = 1 + 2 - 3 + 1 - 1 = 0$.
Now we have:
$x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1 =$
$= (x - 1)(x^4 + x^3 + 3x^2 + 1)$.
Now we'll look at the equation $x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 = 0$.
$x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 = x^4 + 2 \times x^2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x^2 + 1 =$
$= \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{11}{4}x^2 + 1 \geq 0 + 0 + 1 > 0$.
So the equation $x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ has no real roots. Then the equation $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ has only one real root ($x = 1$) including multiplicity.

Second solution (Jasen Plamenov Penchev, 9th grade, PMG "Akad. Ivan Gyuzelev" – Gabrovo**):**
Like in the first solution we have:
$x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + 3x^2 + 1)$.
Let $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$. Then $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6x = x(4x^2 + 3x + 6)$ and it has a root $x = 0$. Since the equation $4x^2 + 3x + 6 = 0$ has its discriminant

$D = 3^2 - 4 \times 4 \times 6 = 9 - 96 < 0$, this equation has no real roots. So $f'(x) = 0$ has only one real root ($x = 0$) including multiplicity and the function $f(x)$ changes its direction (increasing – decreasing, or decreasing – increasing) at $x = 0$.
$f(0) = 0^4 + 0^3 + 3 \times 0^2 + 1 = 1$
$f(1) = 1^4 + 1^3 + 3 \times 1^2 + 1 = 1 + 1 + 3 + 1 = 6 > f(0)$
$\Rightarrow f(x)$ is increasing in $(0; +\infty)$ and $f(x)$ is decreasing in $(-\infty; 0)$. Then $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$.
So the equation $x^4 + x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ has no real roots. Then the equation $x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$ has only one real root ($x = 1$) including multiplicity.

3. Решение: $-(3x+4)(3x+2)(3x-1)(x-1) = 4x(3x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -(3x+4)(3x-3)(3x+2)(3x-1) = 4(9x^2+3x) \Leftrightarrow$$

$$-(9x^2+3x-12)(9x^2+3x-2) = 4(9x^2+3x)$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = 9x^2+3x-12 \\ -y(y+10) = 4(y+12) \end{array} \right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+3x-12 = -8 \\ 9x^2+3x-12 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+3x-4 = 0 \\ 9x^2+3x-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{6} \\ x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{6} \end{cases}$$

Solution (Jasen Plamenov Penchev, 9th grade, PMG “Akad. Ivan Gyuzelev” – Gabrovo**):** We have:
$(3x+4)(3x+2)(3x-1)(1-x) = 4x(3x+1) \Leftrightarrow (9x^2+18x+8)(-3x^2+4x-1) = 12x^2 + 4x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -27x^4 + 36x^3 - 9x^2 - 54x^3 + 72x^2 - 18x - 24x^2 + 32x - 8 = 12x^2 + 4x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -27x^4 - 18x^3 + 27x^2 + 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow 27x^4 + 18x^3 - 27x^2 - 10x + 8 = 0.$
Now looking at $x = -1$ we find that it is a root of the given equation:
$27 \times (-1)^4 + 18 \times (-1)^3 - 27 \times (-1)^2 - 10 \times (-1) + 8 = 27 - 18 - 27 + 10 + 8 = 0.$
We have:
$27x^4 + 18x^3 - 27x^2 - 10x + 8 = 27x^4 + 27x^3 - 9x^3 - 9x^2 - 18x^2 - 18x + 8x + 8 =$
$= (x+1)(27x^3 - 9x^2 - 18x + 8).$
Now we’ll look at the equation $27x^3 - 9x^2 - 18x + 8 = 0$. We know that all rational roots of this equation are in the form $\pm\frac{a}{b}$ where a is a divisor of the constant (8) and b is a divisor of the leading coefficient (27). Looking at $x = \frac{2}{3}$ we find that it is a root of the equation:
$27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 18 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 8 = 8 - 4 - 12 + 8 = 0.$
Now we have:
$27x^3 - 9x^2 - 18x + 8 = 27x^3 - 18x^2 + 9x^2 - 6x - 12x + 8 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(27x^2 + 9x - 12) = 0.$
So $27x^4 + 18x^3 - 27x^2 - 10x + 8 = (x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right)(27x^2 + 9x - 12).$
Looking at the equation $27x^2 + 9x - 12 = 0$ we find that its roots are:

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 27 \times (-12)}}{2 \times 27} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 1296}}{54} = \frac{-9 \pm \sqrt{1377}}{54} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{6}$$

So the roots of the given equation are -1; $\frac{2}{3}$; and $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{6}$.

4. Решение: $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 27 = x(x-2)(x^4 + 2x^2 + 3) + 27.$
При $x(x-2) \geq 0 \Longrightarrow x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 27 \geq 27 > 0$,
уравнението няма реални корени.
При $x(x-2) < 0 \Longrightarrow 0 > x(x-2) = (x-1)^2 - 1 \geq -1$ и $x^4 + 2x^2 + 3 < 16 + 8 + 3 = 27$
$\Longrightarrow x(x-2)(x^4 + 2x^2 + 3) > 27x(x-2) \geq -27 \Longrightarrow x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 27 > 0.$

Solution (Jasen Plamenov Penchev, 9th grade, PMG "Akad. Ivan Gyuzelev" – Gabrovo)**:** We have:

$x^6-2x^5+2x^4-4x^3+3x^2-6x+27=\frac{1}{2}x^6-2x^5+2x^4+\frac{1}{2}x^6-4x^3+8+3x^2-6x+3+16=$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3\right)^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3\right)\left(\sqrt{2}x^2\right)+\left(\sqrt{2}x^2\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3\right)^2-2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3\right)\times 2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2+$

$+3(x^2-2\times x\times 1+1^2)+16=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\sqrt{2}x^2\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-2\sqrt{2}\right)^2+3(x-1)^2+16\geq$

$\geq 0+0+3\times 0+16=16>0.$

So the equation $x^6-2x^5+2x^4-4x^3+3x^2-6x+27=0$ has no real roots.

Задачи за 10.-11. клас – финал 2021

1. Решете уравнението $x^4-7x^2-2x+2=0$, ако един от корените му е $\sqrt{2}-1$.

Решение: Нека $x_1=-1+\sqrt{2}\Longrightarrow x_2=-1-\sqrt{2}$ е също корен $\Longrightarrow (x-x_1)(x-x_2)=x^2+2x-1$ е делител на x^4-7x^2-2x+2.

$$x^4-7x^2-2x+2=(x^2+2x-1)(x^2-2x-2)\Longrightarrow x_3=1+\sqrt{3},x_4=1-\sqrt{3}.$$

Отговор: $x_1=-1+\sqrt{2}\,,x_2=-1-\sqrt{2},x_3=1+\sqrt{3},x_4=1-\sqrt{3},$

2. Докажете, че уравнението $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1=0$ има за трикратен корен числото 1, ако *n* естественото число $n>1$.

Решение: Отбелязваме, че $n>1\Leftrightarrow 2n>2\Leftrightarrow 2n\geq 3$.

Уравнението е от поне 3-та степен и има поне 3 решения (корени)

$$f(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1\Longrightarrow$$
$$f'(x)=2nx^{2n-1}-n(n+1)x^n+n(n-1)x^{n-2}$$
$$f''(x)=2n(2n-1)x^{2n-2}-n^2(n+1)x^{n-1}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$\Longrightarrow f(1)=1^{2n}-n.1^{n+1}+n.1^{n-1}-1=0$

$$f'(1)=2n.1^{2n-1}-n(n+1).1^n+n(n-1).1^{n-2}=2n-n(n+1)+n(n-1)=0$$
$$f''(1)=2n(2n-1)\,.1^{2n-2}-n^2(n+1).1^{n-1}+n(n-1)(n-2).1^{n-3}=0$$

Тогава 1 е трикратен корен.

3. Решете уравнението $(x^2-x-1)^3+(x^2-3x+2)^3=(2x^2-4x+1)^3$

Решение: Нека $u=x^2-x-1,v=x^2-3x+2$. Тогава

$$(x^2-x-1)^3+(x^2-3x+2)^3=(2x^2-4x+1)^3\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}u^3+v^3=(u+v)^3\\ u=x^2-x-1\\ v=x^2-3x+2\end{array}\right.$$
$$u^3+v^3=(u+v)^3\Leftrightarrow uv(u+v)=0$$

Остава да решим уравненията

$$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\end{cases}$$
$$x^2-x-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x_4=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$
$$2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_5=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\ x_6=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

4. Докажете, че уравнението $30x^4+18x^2-16x+3=0$ няма реални решения.

Решение: Уравнението $(30x^4+18x^2-16x+3)'=0$ има един корен α и той е от интервала (0;1/3). За тази стойност α изразът $30x^4+18x^2-16x+3$ има най-малка стойност $30\alpha^4+18\alpha^2-16\alpha+3$.

Тази най-малка стойност обаче е положителна, защото от

$120\alpha^3+36\alpha^2-16=0\;\Longrightarrow 30\alpha^4+18\alpha^2-16\alpha+3=30\alpha^3\alpha+18\alpha^2-16\alpha+3=$

$$= (4 - 9\alpha)\alpha + 18\alpha^2 - 16\alpha + 3 = 9\alpha^2 - 12\alpha + 3 = 9(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{3}\right) > 0$$

От $30\alpha^4 + 18\alpha^2 - 16\alpha + 3 > 30\alpha^4 + 18\alpha^2 - 16\alpha + 3 > 0 \Rightarrow 30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 > 0$

Solution (Jasen Plamenov Penchev, 9th grade, PMG "Akad. Ivan Gyuzelev" – Gabrovo**):**

We have: $30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 = 3x^4 + 27x^4 + 18x^2 - 16x + 3 =$
$= 3x^4 + 27x^4 - 9x^3 + 9x^3 - 3x^2 + 21x^2 - 7x - 9x + 3 =$
$= 3x^4 + (3x - 1)(9x^3 + 3x^2 + 7x - 3) = 3x^4 + (3x - 1)(9x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 2x + 9x - 3) = 3x^4 + (3x - 1)(3x - 1)(3x^2 + 2x + 3) = 3x^4 + (3x - 1)^2(3x^2 + 2x + 3) =$
$= 3x^4 + (3x - 1)^2(2x^2 + x^2 + 2x + 1 + 2) = 3x^4 + (3x - 1)^2(2x^2 + (x + 1)^2 + 2) =$
$= 3x^4 + (3x - 1)^2 \times 2x^2 + (3x - 1)^2(x + 1)^2 + 2(3x - 1)^2 =$
$= 3(x^2)^2 + 2\left((3x - 1)x\right)^2 + \left((3x - 1)(x + 1)\right)^2 + 2(3x - 1)^2 \geq 3.0 + 2.0 + 0 + 2.0 = 0.$

So $30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 \geq 0$. If we consider the case when $30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 = 0$, we get that $x^2 = 0$; $(3x - 1)x = 0$; $(3x - 1)(x + 1) = 0$; and $3x - 1 = 0$. But these can't be simultaneously true, so we conclude that $30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 > 0$ which means that the equation $30x^4 + 18x^2 - 16x + 3 = 0$ has no real roots.

Квалификация 2022

1.Решение: $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = 297$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = 297$$

Уравнението се свежда до квадратно

$$y(y - 16) = 297 \Rightarrow y = \begin{cases} 27 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 27 \\ -11 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = -11 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -8 \\ 4 \end{cases}$$

2. Решение: Полагаме $y = x + 1 \Rightarrow (y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 82 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0$
$$\Leftrightarrow y^2 = \begin{cases} -10 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

3. Решение: $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 2(y + 1)x + 2y^2 - 2y + 1 = 0$
Разглеждаме уравнението като квадратно уравнение относно ***x***.
$$D = -4(3y - 2)^2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{3} \Rightarrow x + y = 1$$

Задача 4. **Решение:** $x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = 0 \overset{x=Ca}{\Longrightarrow} (C^4 - 3C^2 + 2)a^4 + C(C^2 - 2) = 0 \Rightarrow C = \pm\sqrt{2}$

$$x^4 + x^3 - 3a^2x^2 - 2a^2x + 2a^4 = (x^2 - 2a^2)(x^2 + x - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pm\sqrt{2} \\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2} \end{cases}$$

Задача 5. Решение: Първо ще установим, че уравнението няма отрицателни корени.
Ако $x < 0 \Rightarrow x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = x^5 + 2x^3 - (x^2 - x + 1) < 0$

Броят на положителните корени на уравнението $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

е равен на броя на положителните корени на уравнението $(x + 1)(x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1) = 0$.

От $(x + 1)(x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 - 1 = 0$

и теоремата на Декарт $\Rightarrow$ имаме една смяна на знаците, тогава положителният корен е един.

Решение на Денис Сираков от Сливен и на Александра Александрова от Кюстендил,

От $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x^3 + x - 1) \Rightarrow$ броят на реалните решения на уравнението е равен на броя на реалните решение на $x^3 + x - 1 = 0$.

С формулата на Кардано установяваме, че уравнението $x^3+x-1=0$ има един корен.

Задача 6. Решение:

<table>
<tr><td>$x^3+6x-2=0$</td><td>$x = z-\frac{2}{z}$</td></tr>
<tr><td>$z^6-2z^3-8=0$</td><td>$t=z^3$</td></tr>
<tr><td>$t^2-2t-8=0$</td><td>$t=4; t=-2 \Longrightarrow z=\sqrt[3]{4}; z=\sqrt[3]{-2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$z=\sqrt[3]{4} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{4}-\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{4}-\frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}=\sqrt[3]{4}-\frac{4\sqrt[3]{3}}{4}= \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$z=\sqrt[3]{-2} \Longrightarrow x=\sqrt[3]{-2}-\frac{2}{\sqrt[3]{-2}}=-\sqrt[3]{2}+\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=-\sqrt[3]{2}+\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=$
$=-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}==\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$. Корен е $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$.</td></tr>
</table>

7. Решение:

<table>
<tr><td>$x^4-2x^3-x+2=0$</td><td>$x=y+\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$y^4-\frac{3}{2}y^2-2y+\frac{21}{16}=0$</td><td>$P=-\frac{3}{2}, Q=-2, R=\frac{21}{16}$</td></tr>
<tr><td>$\left(y^2-\frac{3}{2}+z\right)^2=$
$(-\frac{3}{2}+2z)y^2+2y-\frac{21}{16}+\frac{9}{4}-3z$
$+z^2$
Искаме да намерим такава стойност на z, за която квадратния тричлен вдясно е
точен квадрат</td><td>$\boldsymbol{z}=?$
$D=(-Q)^2-4.(P+2z)(-R+P^2+2Pz+z^2)=0$
Тук решаваме уравнение от трета степен
$64z^3-240z^2+204z-77=0 \overset{t=4z}{\Longleftrightarrow}$
$t^3-15t^2+51t-77=0$
Ако това уравнение има цели корени, то те са делители на -77. Така евентуалните корени са $\pm1; \pm7; \pm11; \pm77$.
С таблицата на Хорнер установяваме, че $t=11$ е корен $\Longrightarrow z=\frac{11}{4}$.</td></tr>
<tr><td>За намерената стойност на z.
Решаваме две уравнения</td><td></td></tr>
<tr><td>$\left(y^2-\frac{3}{2}+\frac{11}{4}\right)^2=$
$(-\frac{3}{2}+\frac{11}{2})y^2+2y-\frac{21}{16}+\frac{9}{4}-\frac{11}{4}+\frac{121}{16}$
$\Leftrightarrow \left(y^2+\frac{5}{4}\right)^2=4y^2+2y+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(y^2+\frac{5}{4}\right)^2=4\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$
$\sqrt{\left(y^2+\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{4\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}$
$\Leftrightarrow y^2+\frac{5}{4}=2\left\|y+\frac{1}{4}\right\|$
Остава да решим две уравнения
$\Leftrightarrow y^2+\frac{5}{4}=2(y+\frac{1}{4})$ и
$y^2+\frac{5}{4}=-2(y+\frac{1}{4})$.</td><td>Двете уравнения са $4y^2-8y+3=0$ и $4y^2+8y-73=0$.
Само първото от тях има реални решения $y=\frac{3}{2}$ и $y=\frac{1}{2}$.
Тъй като $x=y+\frac{1}{2}$
$\Longrightarrow$ реалните решения на уравнението са 2 и 1.
Това, което беше ясно от самото начало:
$x^4-2x^3-x+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3(x-2)-(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$(x^3-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)(x-2)=0$. ☺</td></tr>
</table>

ФИНАЛ 4 юли 2022 г

Задача	1	2	3	4	5
Отговор	4	$\mathbf{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$	$\sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}$	C = 1 $a-1$; $\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{(a+1)^2-8}\right)$, при $\lvert a+1\rvert \geq 2\sqrt{2}$	22

1. Решение: Числото 1 е трикратен корен

	2	-3	-3	7	-3
1	2	-1	-4	3	0
1	2	1	-3	0	
1	2	3	0		

Четвъртият корен е решение на уравнението $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Отговор: корените са 4

2. Решение: $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = (x^2 - 2x - 1)^2 - x^2 =$

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ \mathbf{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

3. Решение: Нека $[x] = n \Rightarrow 6n = x^2 + 5 > 0$.

$$x^2 - 6[x] + 5 = 0$$

$$0 = x^2 - 6[x] + 5 \geq x^2 - 6x + 5 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq k \leq 5$$

$x^2 + 5$ е цяло число, което се дели на 6 $\Rightarrow x^2 + 5 = 6; 12; 18; 24; 30 \Rightarrow x = 1, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{19}; 5$.

4. Отговор: $x_1 = a - 1, x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{(a+1)^2 - 8}\right)$, при $|a + 1| \geq 2\sqrt{2}$

5. Решение: $2021x^{2022} - 22x^{21} - 20x^{20} = 0 \Leftrightarrow x^{20}(2021x^{2002} - 22x - 20) = 0$

Уравнението има за корен 0. Остава да преброим положителните и отрицателните корени с теоремата на Декарт: $2021x^{2002} - 22x - 20 = 0 \Rightarrow +, -, - \Rightarrow 1$ положителен корен $2021x^{2002} + 22x - 20 = 0 \Rightarrow +, +, - \Rightarrow 1$ отрицателен корен. Общо: уравнението има три корена или 22 корена.

6. Решение:

$$\left| \begin{array}{c} x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0 \\ \boldsymbol{x = y + 2} \end{array} \right. \Rightarrow y^3 - 18y - 30 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} + 2$$

7. Решение:

$$\left| \begin{array}{c} x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 20x - 5 = 0 \\ \boldsymbol{x = y + 1} \end{array} \right. \Rightarrow y^4 - 10y^2 - 4y + 8 = 0$$

$$\boldsymbol{y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{y_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}}$$

8. – 9. клас – квалификация 2023

1. Решение: Нека квадратният тричлен е $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, α и β са корените му. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} \quad c = a\alpha\beta \\ b = -a(\alpha + \beta) \end{array} \right.$$

Получаваме, че

- c се дели на поне три от числата: $a; \alpha; \beta$.
- b се дели на a;

Тогава a дели две от петте числа $\Longrightarrow a = 2, b = 4, c = x$

$$\Longrightarrow 2x^2 + 4x + c = 2(x-3)\big(x-(-5)\big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2.0^2 + 4.0 + c = 2(0-3)\big(0-(-5)\big) \Longrightarrow c = -30$$

2. Решение: Уравнението $x^2 + 2a\,x + 2023 = 0$ има реални корени, ако

$$a^2 - 2023 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \ge \sqrt{2023}$$

От дадените квадратни уравнения реални корени имат само

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 90\,x + 2023 = 0 \\ x^2 + 92\,x + 2023 = 0 \\ x^2 + 94\,x + 2023 = 0 \\ x^2 + 96\,x + 2023 = 0 \\ x^2 + 98\,x + 2023 = 0 \end{array} \right.$$

Сборовете от корените на всяко от тях са съответно – 90, - 92, - 94, - 96 и - -98.
Сборът на всички корени е (– 470).

3. Решение: $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$$

Дискриминантата на квадратния тричлен е неотрицателна, защото

$$4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \ge 0$$

4. Решение: Димана Праматарова от МГ „Кирил Попов“, гр. Пловдив решава задачата така: Едно решение на уравнението е $x = 100$ и $y = 1$. Тогава, прилагаме една от теоремите на Ойлер и получаваме, че всичките цели числа x и y, които са решения на уравнението са $x = 100 + 23n, y = 1 - 20n, n \in \mathbb{Z}$.

Идея на Александър Георгиев Кименов и Мартин Петров от НПМГ”Акад. Л. Чакалов”, гр. София.

$$20x + 23y = 2023 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{2023 - 20}{23} \Longrightarrow 2023 - 20x \equiv 0\ (mod\ 23) \Longrightarrow -1 + 3x \equiv 0\ (mod\ 23) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x \equiv 1\ (mod\ 23) \Leftrightarrow 3x \equiv 24\ (mod\ 23) \Leftrightarrow x \equiv 8\ (mod\ 23) \Longrightarrow x = 8 + 23n, n \in \mathbb{Z},$$

$$y = 81 + 20n, n \in \mathbb{Z}.$$

Иванимира Неделчева от СМГ”П. Хилендарски” решава с подобна техника задачата, но по модул 20.

Задачи за 10.- 12. клас – квалификация 2023

1. Решение: $[x] = k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \{x\} = \alpha \in [0,1)$

$$[(k+\alpha)^2] = 3[k+\alpha] \Leftrightarrow [2k\alpha + \alpha^2] = 3k - k^2 \Longrightarrow 3k - k^2 \ge 0 \Longrightarrow k = 0,1,2,3$$

(1) $k = 0 \xRightarrow{[2k\alpha+\alpha^2]=3k-k^2} [\alpha^2] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \alpha < 1 \Leftrightarrow x \in [0,1)$

(2)

$$k = 1 \xRightarrow{[2k\alpha+\alpha^2]=3k-k^2} [2\alpha + \alpha^2] = 2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 2 \le 2\alpha + \alpha^2 < 3 \\ \alpha \in [0,1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \sqrt{3} - 1 \le \alpha < 1 \Leftrightarrow x \in [\sqrt{3}, 2)$$

(3)

$$k = 2 \xRightarrow{[2k\alpha+\alpha^2]=3k-k^2} [4\alpha + \alpha^2] = 2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 2 \le 4\alpha + \alpha^2 < 3 \\ \alpha \in [0,1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \sqrt{6} - 2 \le \alpha < \sqrt{7} - 2 \Leftrightarrow x \in [\sqrt{6}, \sqrt{7})$$

(3)

$$k = 3 \xRightarrow{[2k\alpha+\alpha^2]=3k-k^2} [6\alpha + \alpha^2] = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 0 \le 6\alpha + \alpha^2 < 1 \\ \alpha \in [0,1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \sqrt{10} - 3 \le \alpha < 1 \Leftrightarrow x \in [\sqrt{10}, 4)$$

Отговор:

$$x \in [0,1) \cup [\sqrt{3}, 2) \cup [\sqrt{6}, \sqrt{7}) \cup [\sqrt{10}, 4)$$

2. Решение: $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} a = \sqrt{3} \\ x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0 \end{array} \right.$

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x=a\\x^2-x+1=a\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{-3+4\sqrt{3}}}{2}}$$

3. Решение: За първото уравнение

$$x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0\Leftrightarrow x^2-2(y-1)x+2y^2-8y+10=0$$

$$D=4((y-1)^2-2y^2+8y-10)=4(-y^2+6y-9)=-4(y-3)^2\le 0\Rightarrow y=3.$$

От второто уравнение

$$2x^2-7x.3+3.3^2+13x-4.3-7=0\Leftrightarrow 2x^2-8x+8=0\Leftrightarrow x=2$$

Отговор: $x=2$, $y=3$.

Идеята на Диян Тасев от ППМГ „Христо Смирненски“, гр. Перник:

$$2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0\Leftrightarrow(2x-y-1)(x-3y+7)=0$$

$$x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0\Leftrightarrow(x-y+1)^2+(y-3)^2=0$$

4. (*олимпиада в САЩ, 1977 г.***) Решение:** Нека означим с a, b, c и d корените на уравнението $x^4+x^3-1=0$.

Тогава от формулите на Виет получаваме

(1) $a+b+c+d=-1$

(2) $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$

(3) $abc+abd+acd+bcd=0$

(4) $abcd=-1$

От (1) и (4) $\Rightarrow\left|\begin{array}{l}c+d=-1-a-b;\\cd=-\frac{1}{ab}\end{array}\right.$

Означаваме $r=ab$.

Преобразуваме (2):

$ab+a(c+d)+b(c+d)+cd=0\Rightarrow$

(5) $r+(a+b)(-1-a-b)-\frac{1}{r}=0.$

Преобразуваме (3):

$ab(c+d)+(a+b)cd=0\Rightarrow r(-1-a-b)-\frac{a+b}{r}=0\Rightarrow$

$$(6)\ a+b=-\frac{r^2}{1+r^2}$$

От (5) и (6) $\Rightarrow r+\frac{r^2}{1+r^2}-\frac{r^4}{(1+r^2)^2}-\frac{1}{r}=0\Rightarrow r^6+r^4+r^3-r^2-1=0.$

8-9 клас – финал 2 юли 2023 г.

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 1- ВА ДО 5-ТА ЗАДАЧА

Задача/ Problem	1	2	3	4	5
Отговор/ Answer	1;1;2;2	2	$n+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$	$x=1, z=2, y=3$	$\frac{3\pm\sqrt{85}}{2}$

3. Решение: $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}\Leftrightarrow([x]-\{x\})\left(1-\frac{1}{[x]\{x\}}\right)\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}[x]\ne\{x\}\\ [x]\{x\}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=n+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}$

4. Решение: $x+\frac{1}{z+\frac{1}{y}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}\Leftrightarrow x=1, z=2, y=3.$

5. Решение: $(x-7)(x-5)(x+4)(x+2)=-81\Leftrightarrow(x^2-3x-28))(x^2-3x-10)=-81$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = x^2 - 3x - 10 \\ (y-18)y = -81 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 19 = 0 \Rightarrow \dfrac{3 \pm \sqrt{85}}{2} \end{array} \right.$$

6. Решение: : Първи начин: (*Strahinja Plazincic, Serbia, Pozega,grammar school "Sveti Sava"***)**

$$x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^3 x^3 + 1 - 3\sqrt{3}x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}x + 1\right)\left(3x^2 - \sqrt{3}x + 1\right) - 3\left(\sqrt{3}x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}x + 1\right)\left(3x^2 - \sqrt{3}x - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}x + 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right)\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Втори начин (*Denis Sirakov, Bulgaria, Sliven, PPMG Dobri Cintulov***)** С формулата на Кардано намираме един корен $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow P = -1; Q = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{2.3\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4}{4.27} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2.3\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4}{4.27} - \frac{1}{27}}} \Rightarrow x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Със схемата на Хорнер:

	1	**0**	**−1**	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$
$\frac{2}{\sqrt{3}}$	**1**	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	**0**

$$x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Трети начин: $F(x) = x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow F_{max} = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Със схемата на Хорнер:

	1	**0**	**−1**	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}$	**0**
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	**0**	

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ е двукратен корен, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ е третият корен

Четвърти начин (*Veronika Ivanova Pavlova, Bulgaria, PMG Ivan Vazov, Dimitrovgrad***):**

$$x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x^3 - \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x(3x^2 - 1) - 2(\sqrt{3}x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1) - 2(\sqrt{3}x + 1) \Leftrightarrow (\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x(\sqrt{3}x - 1) - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x - 1)(3x^2 - \sqrt{3}x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Пети начин (*Stojadinovic Jovan,Serbia, Belgrade, Mathematical Grammar School***):**

$$\left| \begin{array}{l} x^3 - x - \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = 0 \\ \quad y = x\sqrt{3} \end{array} \right. \Rightarrow y^3 - 3y - 2 = 0$$

$$y^3 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+y-2) = 0 \Leftrightarrow y = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Задачи за 10 – 12 клас – – финал 2 юли 2023

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ 1- ВА ДО 5-ТА ЗАДАЧА

Задача	1	2	3	4	5
Отговор	3	$-300x + 295$	1;2;10	$x = 1, y = 2, z = -3$	$x = 2, y = 3.$

2. Решение: При деление на полинома $3x^{100} + 2$ на полинома от втора степен $(x+1)^2$ ще получим частно $A(\mathrm{x})$, което е полином от степен 98 и остатък $Bx + C$, който е от спепен или 0, или 1; където B и C са константи.

$$3x^{100} + 2 = A(x).(x+1)^2 + Bx + C$$

$(x+1)^2$ дели разликата на делимото и остатъка, т.е.

$$3x^{100} + 2 - (Bx + C)$$

$$x = -1 \Rightarrow 3.(-1)^{100} + 2 - (B.(-1) + C) = 0 \Rightarrow -B + C = 5$$

$$x = -1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \left(3x^{100} + 2 - (Bx + C)\right)' = 300x^{99} - B \\ \quad 300.(-1)^{99} - B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow B = -300 \xRightarrow{-B+C=5} C = 255$$

$$Bx + C \Rightarrow -300x + 255$$

4. Решение: Събираме трите уравнения и получаваме, че

$$2(x^3+y^3+z^3) + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) - 3xyz = 0 \Rightarrow$$

$$2(x^3+y^3+z^3) + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) - 3xyz = 0$$

Прилагаме тъждеството $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ и получаваме $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$

Вторият множител е 0 само ако x = y = z = 0, което не е решение. Тогава $x + y + z = 0$.

Първото и третото уравнение записваме във вида

$$\left| \begin{array}{l} y(y^2+x^2+z^2+xy) = 14 \\ \quad x(x^2+y^2+xy) = 7 \end{array} \right. \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2, z = -3.$$

5. Решение: $55(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 229(xy^3 + 1)$

$$x^2 + \cfrac{1}{xy + \cfrac{1}{y^2}} = 4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{9}} \Leftrightarrow x = 2, y = 3.$$

6. Отговор: 0,2, 4, …., 2024. **Решение:** Забелязваме, че $x^2 + 1 = 0$ има 0 корени, $x^2 = 0$ има 1 корен, $x^2 - a^2 = 0$ има 2 корена. При различни стойности на a, ние можем да получим многочлен от степен 2024 с 2024 реални корена.

8 – 9 клас – квалификация 2024

1. Отговор: 1; $\frac{3}{2}$. Решение: Евентуалните рационални корени са от вида *p/q*, където *p* е цяло число, което дели свободния член 3,

q е естествено число, което дели коефициента пред най-високата степен, т.е. 2.

Със схемата на Хорнер получаваме, че

	2	**−5**	**5**	**−5**	**5**	**−5**	**3**
1	**2**	**−3**	**2**	**−3**	**2**	**−3**	**0**

$\frac{3}{2}$	**2**	**0**	**2**	**0**	**2**		

$$\mathbf{2x^6 - 5x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-3)(x^4 + x^2 + 1) = 0.}$$

Уравнението има два реални корена 1 и $\frac{3}{2}$.

2. Отговор: уравнението няма отрицателни корени.

Решение: $\mathbf{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(x^2-1)^2}{2x^2+1}}$. Ако x_0 е корен на уравнението, тогава

$$\mathbf{x_0 = \frac{({x_0}^2 - 1)^2}{2{x_0}^2 + 1} \geq 0}$$

3. Отговор: 1.

Решение: $\frac{x^4}{(x-2)^2} = x^2 + 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{x^4}{(x-2)^2} + (x-2)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^2} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2}{x^2} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (x^2 + (x-2)^2)(4x-4) = 0 \\ x(x-2) \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 1$$

4. Отговор: 1.

Решение: $(x^2 + x + 1)^2 - 13x^2(x^2 + x + 1) + 40x^4 = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} y^2 - 13x^2y + 40x^4 = 0 \\ y = x^2 + x + 1 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = \begin{cases} 8x^2 \\ 5x^2 \end{cases} \Rightarrow$ реалните корени са $\mathbf{\frac{1 \pm \sqrt{29}}{14}; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}}$

5. Отговор: 3. Решение: Ако $(x_0; y_0)$ е решение $\Rightarrow (-x_0; y_0)$ е също решение.
За да има системата уравнения единствено решение е неодходимо, но не е достатъчно, $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.
Ако $x = 0$, тогава

$$\left| \begin{array}{c} y = a.0^2 + |0| + a - 2 \\ 0^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow a = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Ако $a = 1$, решаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} y = x^2 + |x| - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

Графично установяваме, че частта от параболата и частта от окръжността при отрицателни и положителни стойности на х имат пресечни точки. Тогава системата има повече от едно решение.
Ако $a = 3$, решаваме системата

$$\left| \begin{array}{c} y = 3x^2 + |x| + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

От $y = 3x^2 + |x| + 1 \Rightarrow y \geq 1$
От $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.
Така достигаме до $y = 1$ и $x = 0$ като решение на системата уравнения.

6. Решение: Първи начин: С правилото на Хорнер:

	3	-2	-10	13	0	-7	28	-10
$\frac{-2+\sqrt{10}}{3}$	3	$-4+\sqrt{10}$	$-4-2\sqrt{10}$	9	$-6+3\sqrt{10}$	$7-4\sqrt{10}$	$10+5\sqrt{10}$	0

Втори начин: Нека да разгледаме двете числа $\frac{-2+\sqrt{10}}{3}; \frac{-2-\sqrt{10}}{3}$.

Те са корени на квадратното уравнение

$$\left(x - \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{-2-\sqrt{10}}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 2 = 0.$$

И така: Ако $x_0 = \frac{-2+\sqrt{10}}{3} \Rightarrow 3x_0^2 + 4x_0 - 2 = 0$.

За краткост означаваме $A = 3x^7 - 2x^6 - 10x^5 + 13x^4 - 7x^2 + 28x - 10$
Ще пресметнем $A = 3x_0^7 - 2x_0^6 - 10x_0^5 + 13x_0^4 - 7x_0^2 + 28x_0 - 10$.

$3x_0^2 = -4x_0 + 2$	$3x_0^7 = -4x_0^6 + 2x_0^5$	$A = -6x_0^6 - 8x_0^5 + 13x_0^4 - 7x_0^2 + 28x_0 - 10$
$3x_0^2 = -4x_0 + 2$	$-6x_0^6 = 8x_0^5 - 4x_0^4$	$A = 9x_0^4 - 7x_0^2 + 28x_0 - 10$
$3x_0^2 = -4x_0 + 2$	$9x_0^4 = -12x_0^3 + 6x_0^2$	$A = -12x_0^3 - x_0^2 + 28x_0 - 10$
$3x_0^2 = -4x_0 + 2$	$-12x_0^3 = 16x_0^2 - 8x_0$	$A = 15x_0^2 + 20x_0 - 10 = 0$

10 – 12 клас – квалификация 2024

Problem 1. Solution: The given problem is to find the sum of the series:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2024^3$$

This series is a sum of cubes of consecutive integers starting from 1. The formula for the sum of cubes of the first n natural numbers is:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

For the given series, we can directly apply the formula for the sum of cubes:

$$S = \left(\frac{2024(2024+1)}{2}\right)^2$$

Expanding this, we get:

$$S = \left(\frac{2024 \cdot 2025}{2}\right)^2$$
$$S = (1012 \cdot 2025)^2$$
$$S = (2042040)^2$$
$$S = 4\ 199\ 630\ 490\ 000$$

Problem 2. Solution: Let's do the following substitution: $a = x + \frac{1}{3}$ $b = y + \frac{1}{3}$ $c = z + \frac{1}{3}$

Now, let's cube the three parts:

$$a^3 = x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} \quad b^3 = y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27} \quad c^3 = z^3 + z^2 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{27}$$

Note that we must have: $x \geq -\frac{1}{3}, y \geq -\frac{1}{3}, z \geq -\frac{1}{3}$. Moreover, since $a + b + c = 1 = x + \frac{1}{3} + y + \frac{1}{3} + z + \frac{1}{3} = x + y + z + 1 \Rightarrow x + y + z = 0$.

$$a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}(x + y + z) + 3\frac{1}{27}$$

However, we have that $x + y + z = 0$.

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + x^2 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + \frac{1}{9}$$

But we want $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{9}$. So, finally we get:

$$x^2(x+1) + y^2(y+1) + z^2(z+1) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$
$$x^2(x+1) + y^2(y+1) + z^2(z+1) = 0$$

We know that $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$ and that $x > -\frac{1}{3} \Rightarrow x + 1 \geq \frac{2}{3}$ (same goes for y and z). Thus, the only solution is $x = 0, y = 0, z = 0$ which means $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$.

Problem 3. Solution: Let $a = -b - c$. Now, we can transform the equation the following way:

$$a(\frac{3}{b} + \frac{3}{c}) + b(\frac{3}{c} + \frac{3}{a}) + c(\frac{3}{a} + \frac{3}{b}) =$$
$$= (-b - c)(\frac{3}{b} + \frac{3}{c}) + b(\frac{3}{c} + \frac{3}{(-b - c)}) + c(\frac{3}{(-b - c)} + \frac{3}{b}) =$$
$$= 3[\frac{-b - c}{b} + \frac{-b - c}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{-b - c} + \frac{c}{-b - c} + \frac{c}{b}] =$$
$$= 3[-1 + \frac{-c}{b} + \frac{-b}{c} - 1 + \frac{b}{c} - \frac{b}{b + c} - \frac{c}{b + c} + \frac{c}{b}] =$$

$$= 3[(-3)] = -9$$

Problem 4. Solution: Let's look closer to the left hand side:

$$\sqrt{2a\sqrt{4a\sqrt{8a\sqrt{16a\ldots\sqrt{1024a}}}}} = (2a)^{\frac{1}{2}} \times (4a)^{\frac{1}{4}} \times (8a)^{\frac{1}{8}} \times \cdots (1024a)^{\frac{1}{1024}} =$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}} \cdots a^{\frac{1}{1024}}) \times (2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{8}} \cdots 1024^{\frac{1}{1024}}) =$$

$$= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1024}} \times (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{3}{8}} \times 2^{\frac{4}{16}} \times \cdots \times 2^{\frac{10}{1024}}) = a^{\frac{1023}{1024}} \times 2^{A}$$

Here A is the following:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{10}{1024} = \frac{512}{1024} + \frac{512}{1024} + \frac{384}{1024} + \cdots + \frac{10}{1024} = \frac{2036}{1024} = \frac{509}{256}$$

So, finally we have that the left hand side is equal to:

$$a^{\frac{1023}{1024}} \times 2^{\frac{509}{256}}$$

Thus, the equation turns into:

$$a^{\frac{1023}{1024}} = \frac{2024}{2^{\frac{509}{256}}}$$

So, the value of a is:

$$a = \left(\frac{2024}{2^{\frac{509}{256}}}\right)^{\frac{1024}{1023}}$$

Problem 5. Solution: We'll use the following equality:

$$(a + b + c + d)^2 = (a + b)(b + c) + ()$$

Problem 6. Answer: 1349. **Solution:** Решение на Димана Праматарова от МГ - Пловдив:

Първо ще отбележим, че от

$x^2 + x + 1 = 0 \implies x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Longrightarrow x^3 = 1 \Longrightarrow x^{3n} = 1, n \in \mathbb{N}$

$x + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11} + \ldots + x^{2023} + x^{2024} + 2024 =$

$$= x(1 + x + x^2) - x^3 + x^4(1 + x + x^2) - x^6 + \cdots + +x^{2025}(1 + x + x^2) - x^{2025} + 2024 =$$

$$= 2024 - \Bigl(\underbrace{x^3 + x^6 + \cdots + x^{2025}}_{674}\Bigr) = 2024 - 674 = 1349$$

Решение на Радослав Балкански от ППМГ – Стара Загора

$x^2 + x + 1 = 0 \implies x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Longrightarrow x^3 = 1 \Longrightarrow x^{3n} = 1, n \in \mathbb{N}$

$$x + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11} + \ldots + x^{2023} + x^{2024} + 2024 =$$

$$= \frac{x(x^{2024} - 1)}{x - 1} - (x^3 + x^6 + \ldots + x^{2021}) + 2024 =$$

$$= \frac{x^{2025} - x}{x - 1} - (x^3 + x^6 + \ldots + x^{2021}) + 2024 = \frac{1 - x}{x - 1} - (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{673}) + 2024 = 1349$$

Problem 7. Solution: Let the three distinct real roots of $f(x)$ be r_1, r_2, r_3. Since these are real roots, by the Intermediate Value Theorem, $f(x)$ changes sign at each root, indicating that $f(x)$ takes on every value between $f(r_1)$ and $f(r_2)$, and between $f(r_2)$ and $f(r_3)$, including zero. Therefore, there exists some x_0 in the real numbers such that $f(x_0) = 0$. Consider the function $f(f(x))$. Since $f(x_0) = 0$, we have $f(f(x_0)) = f(0)$, which is a real number. The function $f(x)$, being a cubic polynomial, is continuous over the real numbers. Therefore, $f(f(x))$ is also continuous over the real numbers. Since $f(x)$ has three distinct real roots, it must change sign around each root, implying that $f(x)$ takes both positive and negative values. Consequently, $f(f(x))$, which is continuous, must also take both positive and negative values. By the Intermediate Value Theorem, since $f(f(x))$ is continuous and takes both positive and negative values, there must be at least one real x for which $f(f(x)) = 0$. Thus, if $f(x)$ has three distinct real roots, then $f(f(x))$ has at least one real root.

8 и 9 клас – финал 30 юни 2024 г.

1. Отговор: $-\frac{2024}{2023}$. **Решение:**

$$1-1:\left(1+1:(1+1:x)\right)=\frac{2024}{2025}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{2024}{2025}\Leftrightarrow\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2025}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=2025\Leftrightarrow\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=2024\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}=\frac{1}{2024}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=-\frac{2023}{2024}\Leftrightarrow x=-\frac{2024}{2023}$$

2. Отговор: $a=\pm 45$. **Решение:** $1012x = a - 1013x \Leftrightarrow x=\frac{a}{2025}$.

$\frac{a}{2025}$ е корен на $a^3x - 1023 = 1022$, ако $a^3.\frac{a}{2025} - 1023 = 1022 \Leftrightarrow a^4 = 2024 \Leftrightarrow a = \pm 45$

3. Отговор: $(x^2+x-2)(x^2-x+4)$. **Решение:**

$$x^2(x^2+2)-(x-2)(x-4)\; y=x^2, z=x-2 \Rightarrow\; y(y+2)-z(z-2)$$

$$=y^2-z^2+2(y+z)=$$

$$=(y+z)(y-z)+2(y+z)=(y+z)(y-z+2)\Longrightarrow(x^2+x-2)(x^2-x+4)$$

4. Отговор: (13;5;2), (13;3;5), (13;2;11).

Решение: $pqr=13(p-q+r)\Longrightarrow$

$$\begin{cases} p=13\Rightarrow qr=13-q+r\Rightarrow q=\dfrac{13+r}{1+r}=1+\dfrac{12}{1+r}\Rightarrow\begin{cases}p=13, r=2, q=5\\ p=13, r=5, q=3\\ p=13, r=11, q=2\end{cases}\\ q=13\Rightarrow pr=p-13+r\Rightarrow p=\dfrac{r-13}{r-1}=1-\dfrac{12}{r-1}<1\Rightarrow\emptyset\\ q=13\Rightarrow pr=p-13+r\Rightarrow p=\dfrac{r-13}{r-1}=1-\dfrac{12}{r-1}<1\Rightarrow\emptyset\;\Rightarrow\begin{cases}r=13, p=2, q=5\\ r=13, p=2, q=5\\ r=13, p=11, q=2\end{cases}\end{cases}$$

5. Отговор: $-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$. **Решение:** $x^3-3\sqrt{8}.\sqrt{27}\,x+\sqrt{8}.\sqrt{27}\left(\sqrt{8}+\sqrt{27}\right)=0\Rightarrow x^3-3u^3v^3x+u^3v^3(u^3+v^3)=0$.**Търсим реално число С, такова че** $x=Cuv(u+v)$

$$\left(Cuv(u+v)\right)^3-3u^3v^3Cuv(u+v)+u^3v^3(u^3+v^3)=0$$

$$(C^3+1)u^2+(2C^3-3C-1)uv+(C^3+1)v^3=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow x=-uv(u+v)$$

$$\Rightarrow x^3-3u^3v^3x+u^3v^3(u^3+v^3)=\left(x+uv(u+v)\right)\left(x^2-uv(u+v)x+u^2v^2(u^2-uv+v^2)\right)=0$$

$x^2-uv(u+v)x+u^2v^2(u^2-uv+v^2)=0$ има дискриминанта $D=-3u^2v^2(u-v)^2\le 0$

В случая $u=\sqrt{8};\ v=\sqrt{27}$ и уравнението има един реален корен

$$-\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$$

6. Отговор: 0. **Решение:** $x^4+3x^3-4x^2+x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{(x^2-2)^2}{3x^2+1}$. Ако допуснем, че съществува отрицателен корен $x_0<0$ тогава $x_0<0\le\frac{\left(x_0{}^2-2\right)^2}{3x_0{}^2+1}$. Следователно x_0 не удовлетворява уравнението. Уравнението няма отрицателни корени.

AGE GROUPS 10 – 12 (born in 2007 - 2005) – финал 30 юни 2024 г.

Problem	1	2	3	4	5
Answer	(1, 2, 2)	$(\sqrt{3},1,3)$	$-\frac{1}{2}$	(17, 12,12), (33, 8, 24), (33, 24, 8)	53; 2

6. We will use the following substitution: $x=sin(\theta), y = cos(\theta)$. The intuition behind this trigonometric substitution comes from equation (1). Using the new parameter θ the second equation turns into:

$$2sin(\theta)cos(\theta) + cos^2(\theta) - sin^2(\theta) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Using the trigonometric identities this turns into: $sin(2\theta) + cos(2\theta) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

We can solve this equation in 2 ways:

First Method:

$$sin(2\theta) + cos(2\theta) = sin(2\theta) + sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = 2sin(\frac{2\theta + \frac{\pi}{2} - 2\theta}{2})cos(\frac{2\theta - \frac{\pi}{2} + 2\theta}{2})$$

$$= 2sin(\frac{\pi}{4})cos(2\theta - \frac{\pi}{4})$$

We know that $2sin(\frac{\pi}{4}) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Then: $\sqrt{2}cos(2\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow cos(2\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

The right side is equal to $cos(\frac{\pi}{12})$. We get $cos(2\theta - \frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{12}) \Rightarrow 2\theta - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{12}$. Checking both options, we get $\theta = \frac{\pi}{12}$.

Second Method: $sin(2\theta) + cos(2\theta) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Longrightarrow [sin(2\theta) + cos(2\theta)]^2 = (\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2$

$$sin^2(2\theta) + cos^2(2\theta) + 2sin(2\theta)cos(2\theta) = (\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2$$

$$1 + sin(4\theta) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow sin(4\theta) = sin(\frac{\pi}{3}) \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$$

Finally, it follows that: $x = sin(\frac{\pi}{12}), y = cos(\frac{\pi}{12})$

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИ С АРИТМЕТИЧНИ РЕБУСИ

ЗАДАЧИ ЗА 1, 2, 3 И 4 КЛАС – квалификация 2024

1. Отговор: 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36. Решение: Сборът на 8 различни едноцифрени числа е най-малко

0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, а най-много е 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44

Тогава едно от едноцифрените числа, което не е вляво, но е в дясно е или 2, или 3, или 4.

$$45 - (a+b) = \overline{ab} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \Longrightarrow 43 - b = 20 + b \\ a = 3 \Longrightarrow 42 - b = 30 + b \Longrightarrow b = 6 \\ a = 4 \Longrightarrow 41 - b = 20 + b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$$

2. Отговор: 28. **Решение**: А:В = Н.Е ⟹ А = В.Н.Е ⟹ А= $\begin{cases} 8 = 4.2.1 \\ 6 = 3.2.1 \end{cases}$

Ако А = 8, тогава има три възможности за В, Н и Е.

Обръщаме внимание, че от Н + И = Е ⟹ Е > Н

Ето и трите възможности при А = 8:

А = 8, Н = 1, Е = 2, В = 4 ⟹ У – Р = 8:4 = 1.2 = 1 + И = 2 ⟹ И = 1, тази цифра е използвана

А = 8, Н = 2, Е = 4, В = 1⟹ У – Р = 8:1 = 2.4 = 2 + И = 4 ⟹ И = 2, тази цифра е използвана

А = 8, Н = 1, Е = 4, В = 2 ⟹ У – Р = 8:2 = 1.4 = 1 + И = 4 ⟹ И = 3, остава да определим У и Р от равенството У – Р = 4 . Сред неизползваните цифри 0, 5, 6, 7 и 9 това условие изпълняват 9 и 5.

9 – 5 = 8: 2= 1.4 = 1 + 3 = 4 ⟹ Р + А + В + Н + И + Н+ А = 5 + 8 + 2 + 1 + 3 + 1 + 8 = 28.

Ако А = 6, тогава има три възможности за В, Н и Е.

Обръщаме внимание, че от Н + И = Е ⟹ Е > Н

Ето и трите възможности при А = 6:

А = 6, Н = 1, Е = 2, В = 3 ⟹ У – Р = 6:3 = 1.2 = 1 + И = 2 ⟹ И = 1, тази цифра е използвана

А = 6, Н = 2, Е = 3, В = 1 ⟹ У – Р = 6:1 = 2.3 = 2 + И = 3 ⟹ И = 1, тази цифра е използвана

А = 6, Н = 1, Е = 3, В = 2 ⟹ У – Р = 6:2 = 1.3 = 1 + И = 3 ⟹ И = 2, тази цифра е използвана

3. Отговор:77. Решение: 5 + 0 + 1 = 6 ⟹ 5А+1И ⟹ 59 + 18 = 77.
4. Отговор:14. Решение: 1111 +888+ 22 +3 = 2024 ⟹ М + О + Р + Е = 1 + 8 +2 + 3= 14 .
5. Отговори: 54; 58; 78. **Решение: 12.42 = 504;** 39.19 = 741**; 14.64 = 896.**
6. Отговор: Започваме от *A* или *D* и завършваме съответно в *D* или *A*.
Решение: Във връх, който не е краен, е влизано и излизано равен брой пъти, т.е. от него излизат четен брой отсечки. Само от началния и крайния връх излизат нечетен брой отсечки. Тъй като само *A* и *D* имат това свойство, то краен е връх *D*.
Коментар на Сава Троански:
За да елиминираме част от вариантите за решение, които според мен са невъзможни, направих следния извод:
Само от точки A и D може да се започне от едната и да се свърши с другата, защото (ако наречем отсечките от точки A и D входове и изходи) само те имат 3 входа или изхода, другите са с по 4.
Т.е от точка A започваш с изход-вход-изход, а в D правим вход-изход-вход и обратно от D към A.
В случай че започваме от всички останали точки(B,C,E) ни остават две точки с нечетен брой входове и изходи, което означава че трябва да свършим и в двете, което не е възможно.
За решението ще броим само вариантите започващи от точка A и приключващи в точка D и накрая ще умножим по 2, за обратния вариант.
Също е задължително ако започнем в точка A да се върнем в точка A и оттам да продължим.
Ще разгледаме само вариантите започващи с AB, защото тези започващи с AB, AC и AE са еднакъв брой.
В прикачените файлове съм написал всички възможни варианти започващи с AB от които решения на задачата са 44, значи вариантите започващи с A са 44.3=132 и вариантите са общо 132.2=264.

5, 6 и 7 клас – квалификация 2024

1. Отговор: ДВЕ = 432, ОСЕМ = 1728⟹ СЕДЕМ = 72428
ДВЕ = 483, ОСЕМ = 1932⟹ СЕДЕМ = 93432; ДВЕ = 516, ОСЕМ = 2064 ⟹ СЕДЕМ = 06564
ДВЕ = 549, ОСЕМ = 2196⟹ СЕДЕМ = 19596; ДВЕ = 716, ОСЕМ = 2864 ⟹ СЕДЕМ =86764
ДВЕ = 816, ОСЕМ = 3264 ⟹ СЕДЕМ = 26864
2. Отговор: Задачата няма решение, защото произведението на две трицифрени числа е по-голямо от 10 000 > ШЕСТ.
3. Отговор: 1404; 1474; 1464. **Решение**: Ребусът У – Р = А:В = Н.Е = Н + И = Е има единствено решение 9 – 5 = 8: 2= 1.4 = 1 + 3 = 4.
И за решаването му са използвани цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 8 и 9. За буквата Б остават възможни цифрите 0, 6 и 7. **Така за НЕБЕ остават възможни три четирицифрени числа** 1404; 1474 и 1464.
4. Решение: От участниците двама са посочили не само отговор, но и реализация:
2 . 8534 = 17068 – Георги Милков от Стара Загора; 8 = 6132 = 49056 – Ния Казакова от Стара Загора
Ето и всичките решения: 10952 = 4. 2738; 13096 = 2. 6548; 14392 = 7. 2056; 16472 = 8. 2059; 16592 = 8. 2074; 16708 = 2. 8354; 16752 = 8.2094; 17068 = 2. 8534; 19746 = 3. 6582; 21483 = 7. 3069; 28503 = 9. 3167; 35168 = 4.8792; 35628 = 4. 8907; 37854 = 9. 4206; 49056 = 8.6132; 50496 = 8.6312; 65187 = 9. 7243; 73458 = 9.8162; 75618 = 9. 8402.
В книгата на Христо Лесов и Светлозар Дойчев „Теми за класна и извънкласна работа по математика за основните училища“, издателство Регалия, 1995 г. задачата е формулирана така:Колко овце има в стадото? Отговорът на този въпрос е най-голямото естествено число К, за което К. ОВЦЕ = СТАДО. Отговорът на тази задача е 87.
92481= 87.1063
5. Отговор: 6 или 9. **Решение:** За удобство да заменим звездичките с букви
$a, b.c, d.e, f = h \Leftrightarrow \overline{ab}.\overline{cd}.\overline{ef} = 1000h$. Тъй като нито една от звездичките не е 0, тогава нито едно от двуцифрените числа не се дели на 10.

Числото $1000h = 2^3.5^3.h$ трябва да представим като произведение на три трицифрени числа, които не се делят на 10.
Ако числото не се дели на 10, то в неговото представяне като произведение на прости числа ако има числото 2, няма числото 5.
Отбелязваме че $5^3 = 125$ е трицифрено, тогава в представянето на нито едно от числата

$$\overline{ab};\ \overline{cd};\ \overline{ef}$$

като произведение на прости числа няма три петици.
Не е възможно в в представянето като произведение на прости множители на трите двуцифрени числа да има по един множител 5, защото поне едно от тях ще е четно, което означава че се дели на 2.5 = 10.
Така едно от числата се дели на 25, друго се дели на 8, трето то се дели на 5.
Можем да считаме, че

$$\overline{ab} = 25k;\ \overline{cd} = 8m;\ \overline{ef} = 5n \Rightarrow h = knm$$

Тъй като и трите числа са двуцифрени, *k* не е четно число, *m* не се дели на 5, а *n* не се дели нито на 2, нито на 5, получаваме че

$$\left| \begin{array}{c} k \in \{1; 3\} \\ m \in \{2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11; 12\} \\ n \in \{3; 7; 9; 11; 13; 17; 19\} \end{array} \right.$$

Възможни са следните варианти 1,5.1,6.2,5 = 6 и 1,5.2,4.2,5 = 9.
Така възможните естествени числа са 6 и 9.
6. Отговор: 2. Решение: 301060 + 429560 = 730620, 309060 + 421 560 = 730 620; 501070 + 349 670 =850 740; 509 070 + 341 670 = 850 740.

1. – 4. клас – финал 30 юни 2024 г.

1. Отговор: 10. Решение: 11 – 9 = 2 ⟹ A + B = 10.
2. Отговор: 187. Решение:

$$\overline{AB} - \overline{BA} = A \Leftrightarrow 9.A - 9.B = A \Leftrightarrow 8.A = 9.B \Leftrightarrow | \left| \begin{array}{l} A = 9 \\ B = 8 \end{array} \right. \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BA} = 98 + 89 = 187$$

3. Отговор: 18. Решение:

$$A \times B = A + B - 1 \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \Rightarrow A = 0; 2; 3; \dots; 9 \Rightarrow 9 \\ B = 0; 2; \dots; 9 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow 9 \end{cases} \Rightarrow 9 + 9 = 19$$

4. Отговор:16 и 4. Решение: $\overline{NE} + \overline{SS} + E + B + \overline{AR}$ е най-малко 20 + 11 + 0 + 4 + 35= 70.
Тогава сборът N + E + S + S + E + B + A + R е 2 + 0 + 1 + 1 + 4 + 0 + 3 + 5 = 16.
Решенията са 4: 30 + 11 + 0 + 5 + 24 = 70; 20 + 11 + 0 + 4 + 35 = 70;
20 + 11 + 0 + 5 + 34 =70; 30 + 11 + 0 + 4 + 25 = 70
5. Отговор:
$27 \Rightarrow 27 \times 594 = 16038; 36 \Rightarrow 36 \times 495 = 17820; 39 \Rightarrow 39 \times 402 = 15678;$
$45 \Rightarrow 45 \times 396 = 17820; 46 \Rightarrow 46 \times 715 = 32890; 52 \Rightarrow 52 \times 367 = 19084;$
$54 \Rightarrow 54 \times 297 = 16038; 63 \Rightarrow 63 \times 927 = 58401; 78 \Rightarrow 78 \times 345 = 26910;$
6. Отговор: 368. **Решение**: Числото $\overline{2024X}$ се дели на 11, само ако *X* = 0.
Числото 20240 се дели на 11, 22, 44, 55, 88. Получават се частни съответно 1840, 920, 460, 368 и 230. Не е трудно да съобразим, че Y = 5, S = 3, E = 6, E = A.
11.1840 = 20240; 22.920 = 20240; 44.460 = 20240; 55. 368 = 20240; 88.230 = 20240

5, 6 и 7 клас – финал 30 юни 2024 г.

1. Отговор: 30291. **Решение:** Буквата *B* не може да е 0 или 1, защото тогава *B.B* ще е или 0, или 1 и няма такива цифри R и E със сбор по-малък от д или от 1.
B не може да бъде и цифра по-голяма или равна на 3, защото 3.3 = 9 не може да е по-малко от частното на две различни едноцифрени числа.
Тогава **B = 2.**
Тъй като R е първата цифра на четирицифрено число, тогава тя е или 1 или 3.
Така получаваме две възможности:

$$3 + 0 < 2.2 < U{:}S \Rightarrow \overline{302US} \Rightarrow \overline{302US} = \{30251\ 30261\ 30271\ 30281\ 30291$$

$$1 + 0 < 2.2 < U{:}S \Rightarrow \overline{102US}$$

$\Longrightarrow$ 30291 е най-голямата стойност на $\overline{REBUS}$

2. Отговор: 1. Решение: $\overline{A5} \times \overline{A5} + 2024 = \overline{7BCD}$. $\overline{A5} \times \overline{A5}$ *е число, последните две цифри на което са 25* $\Longrightarrow \overline{A5} \times \overline{A5} + 2024 = \overline{7B49}$

$$A = 6 \Longrightarrow 65 \times 65 + 2024 = 6249 < \overline{7B49}$$

$$A = 7 \Longrightarrow 75 \times 75 + 2024 = 7649 \Longrightarrow \frac{\overline{CD}}{A \times (B+1)} = \frac{49}{7 \times (6+1)} = 1$$

$$A = 8 \Longrightarrow 85 \times 85 + 2024 = 9249 < \overline{7B49}$$

3. Отговор: 243. Решение:

$E, A \times E, A = S, EA \Leftrightarrow \overline{EA} \times \overline{EA} = \overline{SEA} \Longrightarrow 25 \times 25 = 625 \Longrightarrow S = 6; E = 2; A = 5$

$$S^A \times E^{-A} = 6^5 \times 2^{-5} = 3^5 = 243$$

Задача 4. Отговор: 172; 111. Решение:

$$\frac{\overline{ABC} + \overline{BAC}}{2} = \overline{ACB} \Leftrightarrow \frac{110A + 110B + 2C}{2} = 100A + 10C + B \Leftrightarrow 108B = 90A + 18C \Leftrightarrow$$

$$6B = 5A + C \Longrightarrow A = 1; 6B = 5 + c \Longrightarrow C = 7, B = 2 \Longrightarrow \overline{ACB}_{min} = 172$$

$$C = 1, B = 1 \Longrightarrow \overline{ACB}_{min} = 111$$

5. Отговор: 12; 18; 36. Решение:

$$6 - 1 - 2 = 6:1:2 \Longrightarrow S \times E \times A = 12; 6 - 2 - 1 = 6:2:1 \Longrightarrow S \times E \times A = 12$$

$$6 - 1 - 3 = 6:1:3 \Longrightarrow S \times E \times A = 18; 6 - 3 - 1 = 6:3:1 \Longrightarrow S \times E \times A = 18$$

$$6 - 3 - 2 = 6:3:2 \Longrightarrow S \times E \times A = 36; 6 - 2 - 3 = 6:2:3 \Longrightarrow S \times E \times A = 36$$

$$S - E - A = S:E:A \Longrightarrow S = E.A.(S - E - A) \Longrightarrow S = \frac{E.A.(E + A)}{EA - 1} = A + E + \frac{A + E}{A.E - 1} \geq 3.$$

6. Отговор: 283. **Решение:** if $\overline{BL} + \overline{AC} + K \leq 97 + 86 + 5 = 188 \Longrightarrow \overline{SEA} = 248$,

$$B + L + A + C + K + \overline{SEA} = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 248 = 283 \text{ if}$$

$$\overline{BL} + \overline{AC} + K = \begin{cases} 97 + 86 + 5 \\ 96 + 87 + 5 \\ 95 + 87 + 6 \\ 96 + 85 + 7 \\ 97 + 85 + 6 \\ 95 + 86 + 7 \end{cases}$$

ISSN 2367-654X
„Образование без граници- мотиви, реализация, амбиции"
Брой 34 Година 12
Издател: СНЦ „Педагогическа асоциация Образование без граници"
гр. Стара Загора, ул. Георги Сава Раковски № 90,
Любомир Любенов – Председател на Управителния съвет
Печат: „Танган" ООД
гр. Стара Загора, ул. Цар Иван Шишман №105
Дадена за печат: 06.01.2025 г. Излязла от печат: 15.01.2025 г.
Адрес за кореспонденция: Стара Загора, 6000, пк 288
e-mail: mwb@mathwithoutborders.bg
http://www.mathematicalmail.com; www.mathwithoutborders.bg
ISSN 2367-654X
„Образование без граници - мотиви, реализация, амбиции"
Number 34 Volume 12
Published by Education without Borders Pedagogical Association, Bulgaria
Bulgaria, Stara Zagora 6000, po box 288
e-mail: mwb_en@mathwithoutborders.bg
http://www.mathematicalmail.com

СЪБИТИЕТО
„СТАРА ЗАГОРА ТЪРСИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТАЛАНТИ“
2024 Г. - НАГРАЖДАВАНЕ В СНИМКИ

ЕКИПЪТ

ЧАСТ ОТ НАШИТЕ МЕДАЛИСТИ ОТ Куала Лумпур – WMI 2024

БРОНЗОВИТЕ МЕДАЛИТЕ ВРЪЧИ Г-Н СЛАВИН ЯНАКИЕВ, ИЗПЪЛНИТЕЛЕН ДИРЕКТОР НА „ПРОГРЕС“ АД

ВАНЯ ДИМОВА ВРЪЧВА РЕПЛИКА НА МАСКАТА НА ТЕРЕС, ИЗРАБОТЕНА ОТ ИВАН ВАНЧЕВ, ЗА НАЙ-ТИТУЛУВАНИЯ В СЪСТЕЗАНИЯТА ПО МАТЕМАТИКА ПРЕЗ 2024 Г.

РАДОСЛАВ БАЛКАНСКИ – ЗА АБСОЛЮТНОТО ПЪРВО МЯСТО В КУАЛА ЛУМПУР 2024 Г. И ЗЛАТНИЯ МЕДАЛ ОТ СЕУЛ 2024 Г.

КУПИТЕ И МЕДАЛИТЕ НА

ПОБЕДИТЕЛИТЕ ВРЪЧВАТ Г-Н БОЯН КУЛЕВ И

Г-Н БОНЧО ГРИГОРОВ

БРОНЗОВИТЕ МЕДАЛИСТИ ОТ СЪСТЕЗАНИЕТО НА 8.12.2024 Г.

ЗЛАТНИТЕ МЕДАЛИСТИ И НОСИТЕЛИ НА КУПИ

СРЕБЪРНИТЕ МЕДАЛИСТИ И НОСИТЕЛИ НА КУПИ

ПУБЛИКАТА